

ÁLGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES



**Fundamentos,
estructuras y
aplicaciones interdisciplinarias**

ÁLGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES

**Fundamentos,
estructuras y
aplicaciones interdisciplinarias**

AUTORES

Brito Escalante Carolina, Chiu Lara Roberto Agustín, Mata Valencia Claudia Iveth, Proudinat Suárez José, Herrera Triana Jesús, Rodríguez Moreno Celia Isabel, Uscanga Espinosa Guadalupe, Valenzuela Castillo Carlos Miguel, García Rueda Ana Karen, Serrano Chávez Martha Sarai, Ortiz Muñiz Benigno, Leyva Romero Melva Jamie, Vichy Cruz Aned María, Villegas Fonseca Luis Ernesto, Trejo Lorenzana Layda Cointa.

©RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C. 2026



EDITA: RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C.
DUBLÍN 34, FRACCIONAMIENTO MONTE MAGNO
C.P. 91190. XALAPA, VERACRUZ, MÉXICO.
CEL 2282386072
www.redibai.org
redibai@hotmail.com

ISBN: 978-607-5893-99-0



Sello editorial: Red Iberoamericana de Academias de Investigación, A.C.
(978-607-5893)
Primera Edición, Xalapa, Veracruz, México.
No. de ejemplares: 2
Presentación en medio electrónico digital
Formato PDF 6 MB
Fecha de aparición 24/09/2026
ISBN 978-607-5893-99-0

DICTAMEN EDITORIAL

La presente obra fue arbitrada y dictaminada en dos procesos; el primero, fue realizado por el **COMITÉ EDITORIAL RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C.** con sede en México; que sometió a los capítulos incluidos en la obra a un proceso de dictaminación a doble ciego para constatar de forma exhaustiva la temática, pertinencia y calidad de los textos en relación a los fines y criterios académicos de la misma, cumpliendo así con la primera etapa del proceso editorial. El segundo proceso de dictaminación estuvo a cargo del **COMITÉ CIENTÍFICO RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C.**; donde se seleccionaron expertos en el tema para la evaluación de los capítulos de la obra y se procedió con el sistema de dictaminación a doble ciego. Cabe señalar que previo al envío a los dictaminadores, todo trabajo fue sometido a una prueba de detección de plagio. Una vez concluido el arbitraje de forma ética y responsable y por acuerdo del Comité Editorial y Científico de la Red Iberoamericana de Academias de Investigación A.C. (REDIBAI), se dictamina que la obra **“ÁLGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES. FUNDAMENTOS, ESTRUCTURAS Y APLICACIONES INTERDISCIPLINARIAS”** cumple con la relevancia y originalidad temática, la contribución teórica y aportación científica, rigurosidad y calidad metodológica, actualidad de las fuentes que emplea, redacción, ortografía y calidad expositiva.

Dr. Daniel Armando Olivera Gómez

Director Editorial

Sello Editorial: Red Iberoamericana de Academias de Investigación, A.C.
(978-607-5893)

Dublín 34, Residencial Monte Magno

C.P. 91190. Xalapa, Veracruz, México.

Cel 2282386072

CERTIFICACIÓN EDITORIAL

RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C. (REDIBAI) con sello editorial **No. 978-607-5893** otorgado por la Agencia Mexicana de ISBN, hace constar que el libro **“ÁLGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES. FUNDAMENTOS, ESTRUCTURAS Y APLICACIONES INTERDISCIPLINARIAS”** registrado con el **ISBN 978-607-5893-99-0** fue publicado por nuestro sello editorial con fecha de aparición del 24 de septiembre de 2026 cumpliendo con todos los requisitos de calidad científica y normalización que exige nuestra política editorial.

Fue evaluado por pares académicos externos y aprobado por nuestro Comité Editorial y Científico.

Todos los soportes concernientes a los procesos editoriales y de evaluación se encuentran bajo el poder Editorial de **RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C. (REDIBAI)**, los cuales están a disposición de la comunidad académica interna y externa en el momento que se requieran.

La normativa editorial y repositorio se encuentran disponibles en la página **<http://www.redibai-myd.org>**

Doy fe.

Dr. Daniel Armando Olivera Gómez

Director Editorial

Sello Editorial: Red Iberoamericana de Academias de Investigación, A.C.

(978-607-5893)

Dublín 34, Residencial Monte Magno

C.P. 91190. Xalapa, Veracruz, México.

Cel 2282386072

ÍNDICE

RESUMEN	1
LOS NÚMEROS COMPLEJOS: FUNDAMENTOS, REPRESENTACIÓN Y APLICACIONES	2
BRITO ESCALANTE, CAROLINA CHIU LARA, ROBERTO AGUSTÍN MATA VALENCIA, CLAUDIA IVETH	
MATRICES Y DETERMINANTES COMO HERRAMIENTAS PARA LA MODELACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE INGENIERÍA	16
PROUDINAT SUÁREZ, JOSÉ HERRERA TRIANA, JESÚS RODRÍGUEZ MORENO, CELIA ISABEL USCANGA ESPINOSA, GUADALUPE	
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: FUNDAMENTOS, MÉTODOS DE SOLUCIÓN Y APLICACIONES	26
VALENZUELA CASTILLO, CARLOS MIGUEL	
ESPACIOS VECTORIALES	48
GARCÍA RUEDA, ANA KAREN SERRANO CHÁVEZ, MARTHA SARAI	
APLICACIONES DEL ÁLGEBRA LINEAL A LAS CIENCIAS QUÍMICO-BIOLÓGICAS	53
ORTIZ MUÑOZ, BENIGNO LEYVA ROMERO, MELVA JAMIE VICHY CRUZ, ANED MARÍA	
APLICACIONES DEL ÁLGEBRA LINEAL A LAS CIENCIAS ECONÓMICO-ADMINISTRATIVAS	63
VILLEGAS FONSECA, LUIS ERNESTO TREJO LORENZANA, LAYDA COINTA	

ÁLGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES

Fundamentos, estructuras y aplicaciones interdisciplinarias

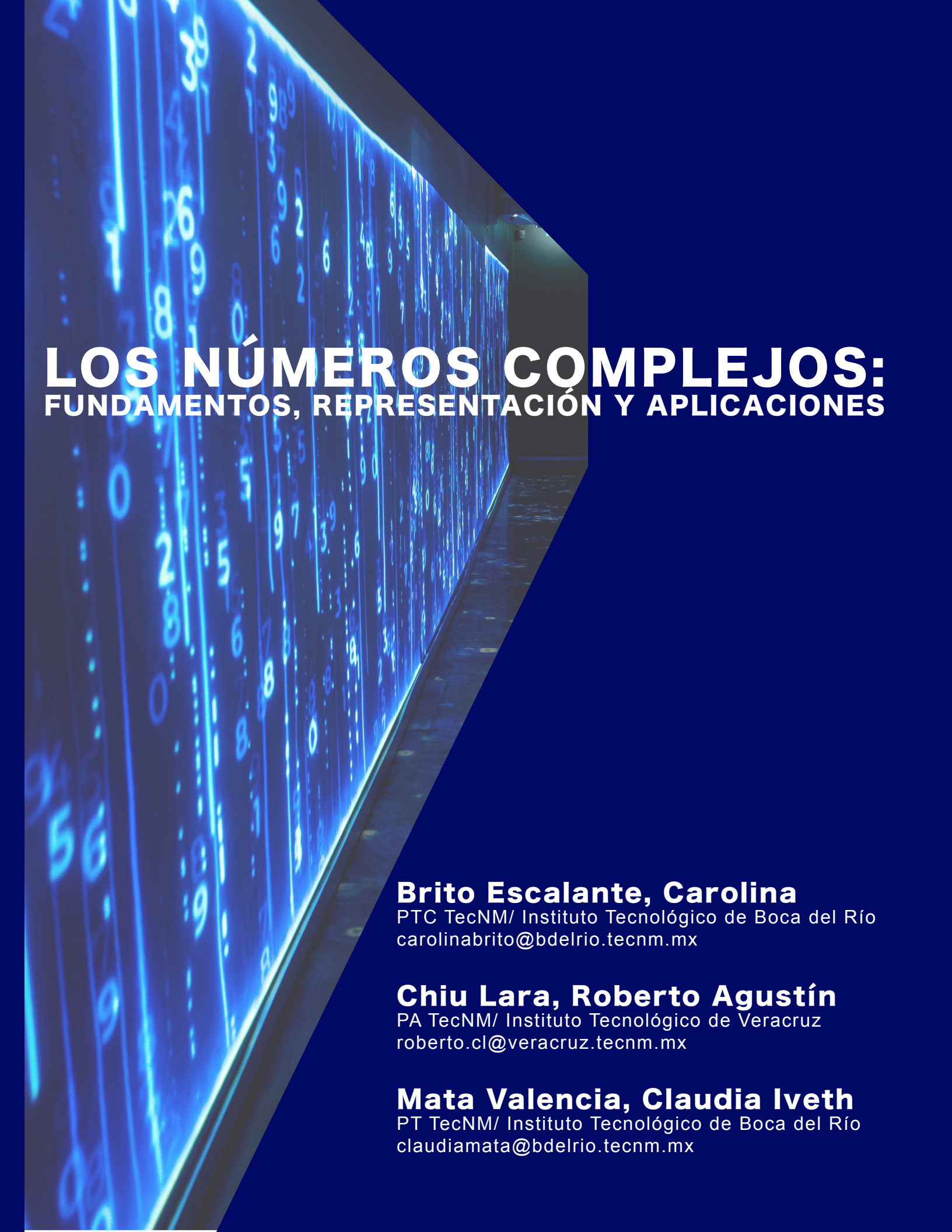
RESUMEN

Álgebra Lineal y sus Aplicaciones: Fundamentos, estructuras y aplicaciones interdisciplinarias es una obra de contribuciones académicas del área de Ciencias Básicas y Ciencias Económico Administrativas del Instituto Tecnológico de Boca del Río, que tiene como propósito fortalecer la comprensión del álgebra lineal como una herramienta fundamental para el análisis, modelación y resolución de problemas en diversos campos del conocimiento. El libro integra contenidos teóricos, metodológicos y aplicados que permiten reconocer la importancia de conceptos algebraicos en la formación científica y profesional de los estudiantes de ingeniería y de otras disciplinas.

A lo largo de sus capítulos se abordan progresivamente conceptos fundamentales del álgebra lineal, iniciando con los números complejos, su representación y sus aplicaciones, para posteriormente profundizar en el estudio de matrices y determinantes como instrumentos esenciales para la modelación y solución de problemas de ingeniería. Se incorporan también los sistemas de ecuaciones lineales, considerando sus fundamentos, métodos de solución y aplicaciones, así como el estudio de los espacios vectoriales, sus estructuras y propiedades, elementos indispensables para comprender conceptos más avanzados del álgebra lineal.

La obra amplía posteriormente su perspectiva hacia un enfoque interdisciplinario mediante la presentación de aplicaciones del álgebra lineal en las ciencias químico-biológicas y en las ciencias económico-administrativas, mostrando cómo las herramientas matemáticas pueden emplearse para representar relaciones, analizar fenómenos, construir modelos y apoyar la toma de decisiones en contextos reales. En conjunto, los capítulos destacan la relación entre la teoría matemática y su aplicación práctica, promoviendo una visión del álgebra lineal como un lenguaje común para la representación y solución de problemas científicos, tecnológicos y profesionales.

Palabras clave: álgebra lineal, números complejos, matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales, modelación matemática, ingeniería, ciencias químico-biológicas, ciencias económico-administrativas.



LOS NÚMEROS COMPLEJOS:

FUNDAMENTOS, REPRESENTACIÓN Y APLICACIONES

Brito Escalante, Carolina

PTC TecNM/ Instituto Tecnológico de Boca del Río
carolinabrito@bdelrio.tecnm.mx

Chiu Lara, Roberto Agustín

PA TecNM/ Instituto Tecnológico de Veracruz
roberto.cl@veracruz.tecnm.mx

Mata Valencia, Claudia Iveth

PT TecNM/ Instituto Tecnológico de Boca del Río
claudiamata@bdelrio.tecnm.mx

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia, los conjuntos numéricos se han ampliado cada vez que las operaciones matemáticas conocidas resultaban insuficientes para resolver los problemas que la propia disciplina o las ciencias aplicadas planteaban. De los números naturales, útiles para contar, se pasó a los enteros para representar la resta y las cantidades negativas; de estos se avanzó hacia los racionales, necesarios para expresar la división, y finalmente hacia los irracionales y los reales, que permiten describir cualquier magnitud continua. Sin embargo, incluso el conjunto de los números reales resulta incompleto al intentar resolver ecuaciones algebraicas tan sencillas como una ecuación cuadrática con discriminante negativo.

Los números complejos surgen precisamente de esa limitación. Al intentar aplicar la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, surgen expresiones que involucran raíces cuadradas de cantidades negativas, lo cual no tiene sentido en los números reales. Durante siglos estas soluciones fueron consideradas ficticias o imposibles; no obstante, matemáticos como Wallis, Gauss y Argand mostraron que podían interpretarse de manera coherente si se definía una nueva unidad, denotada por i , que satisface la condición $i^2 = -1$.

En este capítulo se presenta el estudio sistemático del conjunto de los números complejos: su origen dentro de la jerarquía de los conjuntos numéricos, su definición formal, las operaciones fundamentales que pueden realizarse con ellos (suma, resta, producto, división, conjugado y módulo), su representación geométrica en el plano complejo o diagrama de Argand, la forma polar o trigonométrica, y finalmente las operaciones de potenciación y radicación mediante el teorema de De Moivre. El propósito es que el lector comprenda no solo el formalismo algebraico, sino también el significado geométrico y la utilidad práctica de estos números en el contexto más amplio del álgebra lineal y sus aplicaciones en la ingeniería.

JUSTIFICACIÓN

El estudio de los números complejos no es un ejercicio meramente abstracto: es una herramienta matemática indispensable en múltiples ramas de la ingeniería. En la ingeniería eléctrica, por ejemplo, el análisis de circuitos de corriente alterna se apoya directamente en la representación de voltajes, corrientes e impedancias como cantidades complejas, lo cual simplifica notablemente el tratamiento de fenómenos oscilatorios que, en términos puramente reales, requerirían el manejo simultáneo de ecuaciones diferenciales trigonométricas. En la ingeniería de control y en el procesamiento de señales, el análisis en el dominio de la frecuencia mediante las transformadas de Fourier y de Laplace se fundamenta en la aritmética y en la representación polar de los números complejos. Asimismo, en la mecánica de fluidos,

la teoría de vibraciones y el análisis estructural, diversas soluciones de ecuaciones diferenciales lineales dependen de raíces complejas que describen comportamientos oscilatorios o amortiguados.

En un texto dedicado al álgebra lineal y sus aplicaciones en ingeniería, resulta indispensable dedicar un capítulo a los números complejos, puesto que constituyen el campo escalar sobre el cual se construyen espacios vectoriales complejos, matrices hermíticas, valores y vectores propios complejos, y numerosos modelos matemáticos empleados en el análisis de sistemas dinámicos. Comprender su estructura algebraica y geométrica es, por tanto, un requisito previo para abordar con solidez los temas posteriores del álgebra lineal aplicada.

OBJETIVO

Objetivo general

Analizar el origen, la definición, las propiedades y las distintas formas de representación de los números complejos, con el fin de que el lector adquiriera las herramientas algebraicas y geométricas necesarias para aplicarlas en el estudio del álgebra lineal y en la resolución de problemas propios de la ingeniería.

Objetivos específicos

- Ubicar el conjunto de los números complejos en la jerarquía de los conjuntos numéricos y explicar la necesidad matemática de su creación.
- Definir formalmente un número complejo, sus componentes real e imaginario, y establecer el criterio de igualdad entre dos números complejos.
- Desarrollar las operaciones fundamentales con números complejos: suma, resta, multiplicación, división, conjugado y módulo, así como sus propiedades algebraicas.
- Representar geométricamente los números complejos en el plano cartesiano (diagrama de Argand) y en su forma polar o trigonométrica.
- Aplicar el teorema de De Moivre para calcular potencias y raíces de números complejos.
- Reconocer aplicaciones concretas de los números complejos en distintas áreas de la ingeniería.

MÉTODO

El desarrollo de este capítulo sigue un enfoque expositivo-deductivo, propio de la didáctica de las matemáticas. En primer lugar, se realiza una revisión conceptual de los conjuntos numéricos —naturales, enteros, racionales, irracionales y reales— con el fin de evidenciar, por contraste, la insuficiencia de los números reales para resolver ciertas ecuaciones algebraicas. A partir de esa insuficiencia, se introducen deductivamente la unidad imaginaria y la definición formal del número complejo.

Posteriormente, cada operación (suma, resta, multiplicación, división, conjugado y módulo) se presenta primero mediante su definición formal y, a continuación, mediante ejemplos numéricos resueltos paso a paso, siguiendo la estrategia pedagógica de "definición–propiedad–ejemplo", que facilita la transición del razonamiento abstracto a la aplicación práctica. La representación geométrica se aborda mediante el plano cartesiano, estableciendo la analogía entre el módulo de un número complejo y la distancia euclidiana, lo que permite deducir la forma polar mediante relaciones trigonométricas básicas. Finalmente, se emplea el teorema de De Moivre para generalizar el cálculo de potencias y raíces, ilustrando el procedimiento mediante ejemplos gráficos en el plano complejo. Todo el desarrollo matemático presentado es original y ha sido elaborado específicamente para este capítulo, evitando la reproducción literal de fuentes externas.

MARCO TEÓRICO

Los conjuntos numéricos y el origen de los números complejos

La construcción de los números complejos solo puede comprenderse a partir de la evolución histórica y lógica de los conjuntos numéricos que la preceden.

- Números naturales ($\mathbb{N}$): surgen de la necesidad de contar y enumerar objetos.
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$
- Números enteros ($\mathbb{Z}$): aparecen al definir la operación de resta sobre los naturales, incorporando el cero y los números negativos.
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$
- Números racionales ($\mathbb{Q}$): surgen de la necesidad de dividir, es decir, de expresar cantidades fraccionarias. Todo número racional admite una representación decimal exacta o periódica.
- Números irracionales ($\mathbb{I}$): son aquellos que no pueden expresarse como el cociente de dos números enteros; su representación decimal no es ni exacta ni periódica. Los ejemplos característicos son $\sqrt{2}, \pi, e$.
- Números reales ($\mathbb{R}$): resultan de la unión de los racionales y los irracionales, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, y se representan gráficamente en la recta numérica.

El conjunto de los números reales, sin embargo, resulta insuficiente para resolver ecuaciones cuadráticas con discriminante negativo. Considérese, a modo de ilustración, la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$. Al aplicar la fórmula general de la ecuación de segundo grado se obtiene:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Esta expresión carece de sentido en los números reales, ya que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea negativo. Sin embargo, aplicando las propiedades de los radicales, es posible separar la raíz de un número negativo en el producto de una raíz real por la raíz de -1 :

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$$

Fue así como se aceptó a $\sqrt{-1}$ como una nueva entidad matemática, denotada por i y llamada unidad imaginaria, la cual satisface la condición fundamental:

$$i^2 = -1 \text{ es equivalente a } i = \sqrt{-1}$$

La primera interpretación geométrica coherente de estas cantidades fue propuesta en 1673 por el matemático inglés John Wallis, y posteriormente perfeccionada por Jean-Robert Argand, quien estableció la representación de un número complejo como un punto del plano cartesiano.

Definición de número complejo

Un número complejo es una expresión de la forma:

$$z = a + bi$$

Donde a y b son números reales e i representa la unidad imaginaria. Al número real a se le denomina parte real de z , y se denota $Re(z)$; al número real b se le denomina parte imaginaria de ... y se denota $Im(z)$. El conjunto de todos los números complejos se representa con la letra $\mathbb{C}$.

Casos particulares:

- Si $b = 0$, el número complejo se reduce a $z = a$, un número real puro. Por ello, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Si $a = 0$, el número complejo se reduce a $z = bi$, y se denomina imaginario puro.

Igualdad de números complejos: dos números complejos z

$$z_1 = a + bi \text{ y } z_2 = c + di \text{ son iguales } \Leftrightarrow a = c \text{ y } b = d$$

Es decir, dos números complejos son iguales únicamente cuando coinciden sus partes real e imaginaria.

Suma y resta de números complejos

La suma de números complejos se realiza sumando por separado las partes reales y las partes imaginarias. Formalmente, si $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$, entonces:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

De manera análoga, la resta se obtiene restando cada componente por separado:

$$z - w = (a - c) + (b - d)i, \text{ con } z = a + bi, w = c + di$$

Ejemplo.

Sean $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = -8 + 4i$. Entonces:

$$z_1 + z_2 = (3 - 8) + (2 + 4)i = -5 + 6i$$

Esta operación admite, además, una interpretación geométrica en el plano complejo: como cada número complejo puede representarse mediante un vector con origen en el punto $(0, 0)$, la suma $z_1 + z_2$ equivale a la suma vectorial de z_1 y z_2 , obtenida mediante la regla del paralelogramo, tal como se muestra en la figura siguiente para $z_1 = 5 + 2i$ y $z_2 = 2 + 4i$.

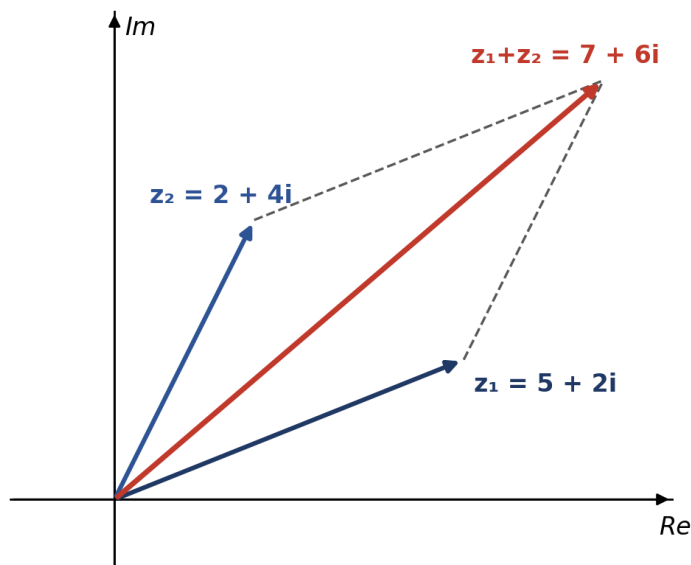


Figura 1. Suma de números complejos interpretada como suma vectorial mediante la regla del paralelogramo.

Fuente: elaboración propia, con base en Lay y McDonald (2016).

La resta, por su parte, puede interpretarse como la suma de z con el opuesto de w , es decir, $z - w = z + (-w)$. Geométricamente, el vector $z - w$ es el que une el extremo de w con el extremo de z (regla del triángulo); al trasladarlo con origen en $(0, 0)$, su punta coincide exactamente con el punto que representa la diferencia de los números complejos, como se ilustra a continuación para $z = 6 + 4i$ y $w = 2 + 5i$.

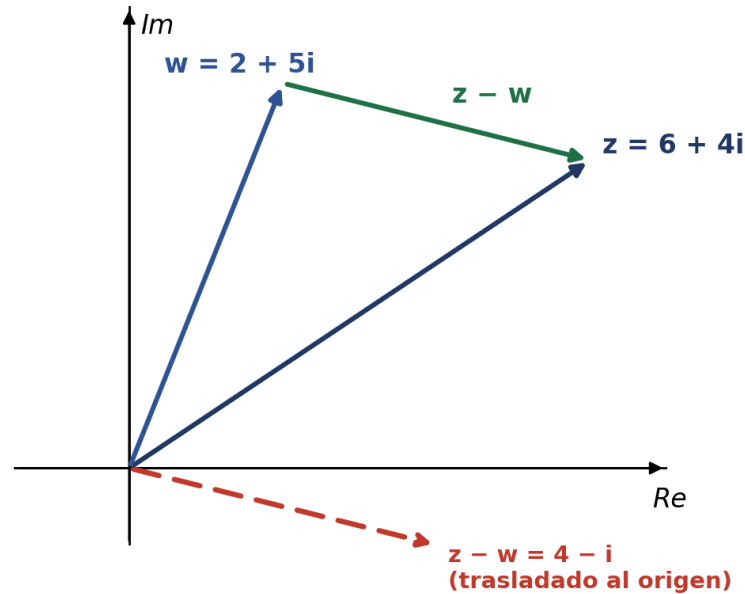


Figura 2. Resta de números complejos interpretada como diferencia vectorial (regla del triángulo).
Fuente: elaboración propia, con base en Lay, Lay y McDonald (2016).

De estas dos operaciones se desprenden propiedades algebraicas generales, análogas a las de los números reales, entre ellas la cerradura, la asociatividad, la conmutatividad, la existencia del elemento neutro ($0 + 0i$) y la existencia del inverso aditivo u opuesto ($-z = -a - bi$), de modo que $z + (-z) = 0$.

Producto de números complejos

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos. Su producto se obtiene aplicando la propiedad distributiva y sustituyendo $i^2 = -1$

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + cb)i$$

Ejemplo.

Sean $z = 6 + 2i$ y $w = 3 + 5i$

Entonces:

$$z \cdot w = (6 \cdot 3 - 2 \cdot 5) + (6 \cdot 5 + 2 \cdot 3)i = 8 + 36i$$

Al igual que en la suma, el producto de números complejos cumple las propiedades de cerradura, asociatividad, conmutatividad, elemento neutro (el número $1 = 1 + 0i$) y elemento inverso: para todo $z \neq 0$ existe z^{-1} tal que $z \cdot z^{-1} = 1$. Además, se cumple la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

El conjugado y el módulo de un número complejo

Dado un número complejo $z = a + bi$, se define su conjugado, denotado por $\bar{z}$, como el número complejo que se obtiene al cambiar el signo de la parte imaginaria:

$$\bar{z} = a - bi$$

Por ejemplo, si $z = 2 + 9i$, su conjugado es $\bar{z} = 2 - 9i$.

Se define, además, el módulo de z , denotado $|z|$, como el número real no negativo:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geométricamente, el módulo representa la distancia desde el origen del plano complejo hasta el punto que representa z , según el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, si $z = 3 + 4i$, entonces $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

El módulo satisface, entre otras, las siguientes propiedades: $|z| \geq 0$; $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$; $|z + w| \leq |z| + |w|$ (desigualdad triangular); $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$; y también: $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

2.6 División de números complejos

Para dividir dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, con $w \neq 0$, se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado de w , lo que convierte al denominador en un número real, ya que $w \cdot \bar{w} = |w|^2$

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$$

Ejemplo. Sean $z = 3 + 4i$ y $w = 2 + 3i$. Multiplicando por el conjugado de w :

$$\frac{3 + 4i}{2 + 3i} = \frac{3 + 4i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} = \frac{6 - 9i + 8i - 12i^2}{2^2 + 3^2} = \frac{(6 + 12) + (-9 + 8)i}{13} = \frac{18 - i}{13}$$

Representación geométrica: el diagrama de Argand

Así como los números reales se representan mediante una recta, los números complejos admiten una representación geométrica en un sistema de coordenadas cartesianas. A cada número complejo $z = a + bi$ se le asocia el punto del plano $P(a, b)$; la parte real se ubica sobre el eje horizontal, denominado eje real, y la parte imaginaria sobre el eje vertical, denominado eje imaginario. El conjunto de todos estos puntos constituye el llamado plano complejo o diagrama de Argand.

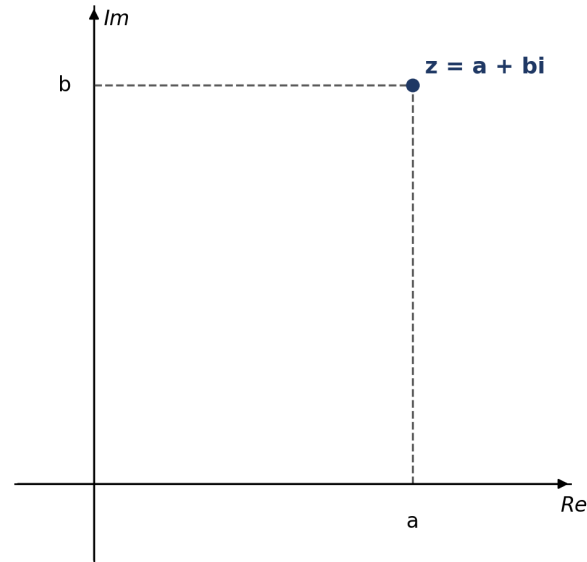


Figura 3. Diagrama de Argand: representación de $z = a + bi$ como el punto $P(a, b)$ del plano complejo. Fuente: elaboración propia, con base en el modelo geométrico propuesto por Argand (1806), citado por Churchill y Brown (2004).

Bajo esta representación, el módulo $|z|$ adquiere una interpretación geométrica directa: corresponde a la longitud del segmento que une el origen con el punto z , es decir, a la distancia euclidiana entre ambos puntos.

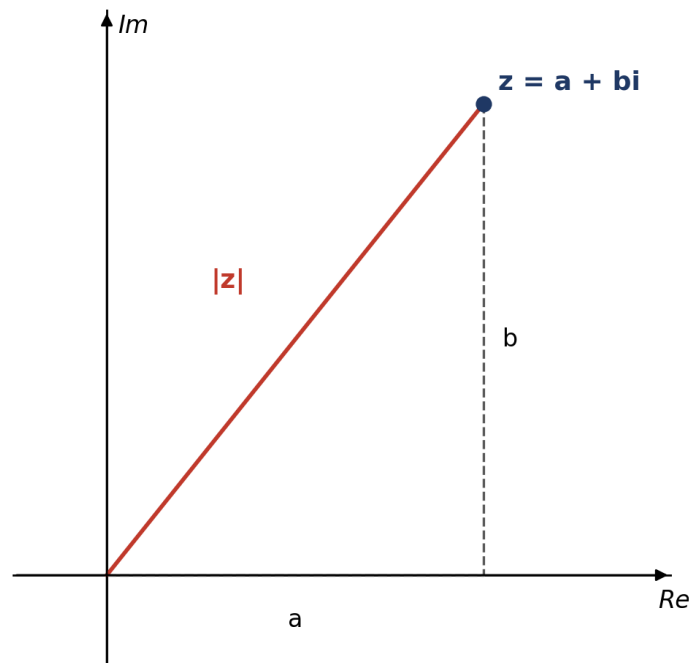


Figura 4. Interpretación geométrica del módulo $|z|$ como la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son las componentes a y b , según el teorema de Pitágoras.

Fuente: elaboración propia, con base en Spiegel, Lipschutz, Schiller y Spellman (2011).

Forma polar o trigonométrica

Para representar un número complejo $z = a + bi$ en forma polar, a cada punto del plano se le asocia un vector de posición que lo une al origen. Dicho vector radio forma un ángulo θ (denominado argumento de z) con el semieje real positivo, medido en sentido contrario a las manecillas del reloj. A partir de las relaciones trigonométricas del triángulo rectángulo formado por a, b y $|z|$, se obtiene:

$$a = |z| \cos \theta \quad b = |z| \sin \theta$$

Sustituyendo estas expresiones en $z = a + bi$, se obtiene la forma polar (o trigonométrica) de un número complejo:

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Donde el módulo se calcula como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y el argumento como $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$, ajustando el resultado según el cuadrante en el que se ubique el punto (a, b), pues la función arcotangente por sí sola solo determina el ángulo dentro de un intervalo de 180° .

Ejemplo.

Sea $z = 2 + 2i$. Su módulo es $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, y su argumento es $\theta = \arctan(2/2) = \arctan(1) = 45^\circ$, por encontrarse en el primer cuadrante. Por lo tanto:

$$z = 2\sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

Cuando el punto (a, b) se ubica en el segundo, tercer o cuarto cuadrante, el ángulo obtenido mediante el arco tangente debe corregirse sumando o restando 180° o 360° , según corresponda, para obtener el argumento real del número complejo. Por ejemplo, para $w = -3 + 4i$ (segundo cuadrante), se obtiene $|w| = 5$ y $\theta = 180^\circ - 53.13^\circ = 126.87^\circ$, de modo que $w = 5(\cos 126.87^\circ + i \sin 126.87^\circ)$.

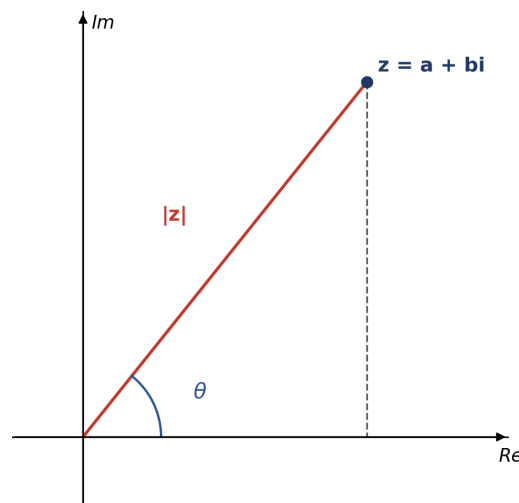


Figura 5. Radio vector $|z|$ y argumento θ de un número complejo, medido en sentido antihorario a partir del semieje real positivo.

Fuente: elaboración propia, con base en Kreyszig (2011).

Multiplicación y división en forma polar

Si $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ y $w = |w|(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ son dos números complejos expresados en forma polar, su producto y su cociente se calculan mediante las siguientes fórmulas, que se obtienen al desarrollar el producto y aplicar las identidades trigonométricas de suma de ángulos:

$$z \cdot w = |z| |w| [\cos(\theta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta + \varphi)]$$

$$z / w = (|z| / |w|) [\cos(\theta - \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta - \varphi)]$$

Es decir, al multiplicar dos números complejos en forma polar, sus módulos se multiplican y sus argumentos se suman; al dividirlos, los módulos se dividen y los argumentos se restan. Esta propiedad simplifica notablemente los cálculos que, en forma binómica, requerirían el uso del conjugado.

Potencias y raíces, el teorema de De Moivre

A partir de la fórmula de multiplicación en forma polar, aplicada reiteradamente, se obtiene una expresión general para calcular la potencia n -ésima de un número complejo, conocida como teorema o fórmula de De Moivre:

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

Ejemplo. Sea $z = 3 + 4i$. Su módulo es $|z| = 5$ y su argumento es $\theta = 53.13^\circ$.

Para calcular z^6 se tiene:

$$z^6 = 5^6 [\cos(6 \cdot 53.13^\circ) + i \operatorname{sen}(6 \cdot 53.13^\circ)] \approx 15625 (\cos 318.78^\circ + i \operatorname{sen} 318.78^\circ)$$

El mismo principio, aplicado de forma inversa, permite calcular las raíces n -ésimas de un número complejo. Si $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ y n es un entero positivo, las n raíces n -ésimas de z están dadas por:

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}} [\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i \operatorname{sen}(\frac{\theta + 2k\pi}{n})], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Cada valor de k genera una raíz distinta, y las n raíces obtenidas se ubican, en el plano complejo, sobre una circunferencia de radio $|z|^{\frac{1}{n}}$, formando los vértices de un polígono regular de n lados. Por ejemplo, para $z = 8(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$, las tres raíces cúbicas se obtienen sustituyendo $k = 0, 1, 2$, lo que produce los argumentos $10^\circ, 130^\circ$ y 250° , igualmente espaciados sobre una circunferencia de radio 2:

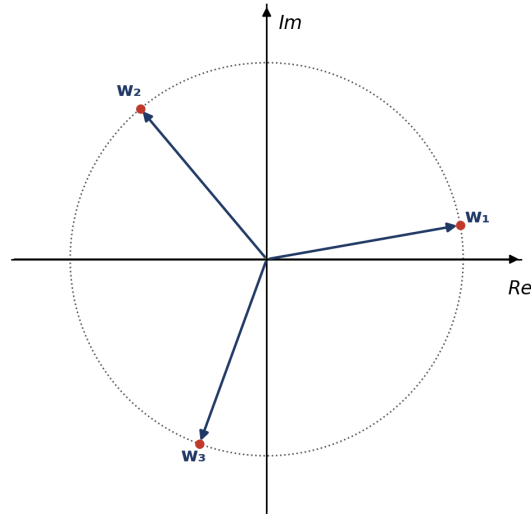


Figura 6. Las tres raíces cúbicas w_1 , w_2 y w_3 de $z = 8(\cos 30^\circ + i \sen 30^\circ)$, ubicadas sobre una circunferencia de radio 2 y separadas 120° entre sí.

Fuente: elaboración propia, con base en el procedimiento descrito por Zill y Dewar (2012).

De manera análoga, las raíces sextas de la unidad, $z = 1(\cos 0^\circ + i \sen 0^\circ)$, se obtienen sustituyendo $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y corresponden a seis puntos igualmente espaciados cada 60° sobre la circunferencia unitaria, formando los vértices de un hexágono regular:

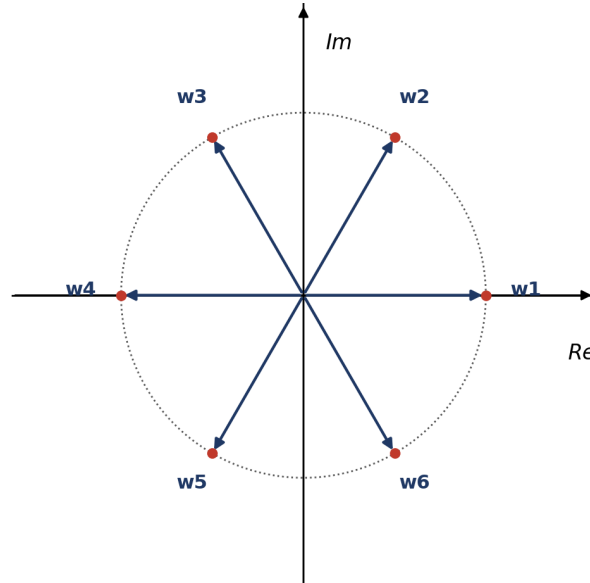


Figura 7. Las seis raíces sextas de la unidad, distribuidas cada 60° sobre la circunferencia unitaria y que forman los vértices de un hexágono regular.

Fuente: elaboración propia, con base en Grossman y Flores Godoy (2019).

APLICACIONES DE LOS NUMEROS COMPLEJOS EN AREAS DE LA INGENIERIA

Más allá de su interés algebraico, los números complejos constituyen una herramienta de trabajo cotidiana en distintas ramas de la ingeniería:

- Ingeniería eléctrica: el análisis de circuitos de corriente alterna emplea la representación factorial, en la que voltajes, corrientes e impedancias se expresan como números complejos, lo que permite sumar y combinar señales senoidales de manera algebraica en lugar de trigonométrica.
- Procesamiento de señales y control: las transformadas de Fourier y de Laplace, utilizadas para analizar sistemas en el dominio de la frecuencia, se basan en la aritmética de los números complejos y en su representación exponencial o polar.
- Vibraciones y sistemas dinámicos: la solución de ecuaciones diferenciales lineales que modelan sistemas oscilatorios o amortiguados frecuentemente produce raíces complejas conjugadas, cuya interpretación geométrica describe la frecuencia del sistema.
- Álgebra lineal aplicada: los espacios vectoriales complejos, las matrices hermíticas y el cálculo de valores y vectores propios complejos presentes, por ejemplo, en el análisis de estabilidad de sistemas, dependen directamente de las propiedades algebraicas estudiadas en este capítulo.

CONCLUSIONES

El análisis realizado permite concluir que los números complejos no son una construcción arbitraria, sino una extensión necesaria del conjunto de los números reales, motivada por la exigencia de resolver ecuaciones algebraicas que, de otro modo, carecerían de solución. Su definición formal, $z = a + bi$, junto con la condición $i^2 = -1$, proporciona una estructura algebraica completa en la que pueden efectuarse todas las operaciones aritméticas fundamentales: suma, resta, multiplicación y división.

La representación geométrica en el plano complejo, así como la forma polar derivada de las relaciones trigonométricas, enriquecen la comprensión de estos números al asociar cada operación algebraica con una transformación geométrica: la suma corresponde a una traslación vectorial, mientras que la multiplicación corresponde a una rotación y un escalamiento. El teorema de De Moivre, por su parte, generaliza este comportamiento al cálculo de potencias y raíces, evidenciando la simetría radial que caracteriza las raíces n -ésimas de un número complejo.

Finalmente, se concluye que el dominio de los números complejos constituye un requisito indispensable para el estudio posterior del álgebra lineal aplicada a la ingeniería, dado que fenómenos tan diversos como los circuitos eléctricos, el procesamiento de señales, el control de sistemas y el análisis de vibraciones

mecánicas recurren de manera constante a las propiedades algebraicas y geométricas desarrolladas en este capítulo.

REFERENCIAS

- Arya, J. C., y Lardner, R. W. (2009). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía (5.^a ed.). Pearson Educación.
- Churchill, R. V., y Brown, J. W. (2004). Variable compleja y aplicaciones (7.^a ed.). McGraw-Hill.
- Grossman, S. I., y Flores Godoy, J. J. (2019). Álgebra lineal (8.^a ed.). McGraw-Hill Interamericana.
- Kreyszig, E. (2011). Matemáticas avanzadas para ingeniería (Vol. 1, 10.^a ed.). Limusa Wiley.
- Lay, D. C., Lay, S. R., y McDonald, J. J. (2016). Álgebra lineal y sus aplicaciones (5.^a ed.). Pearson Educación.
- Spiegel, M. R., Lipschutz, S., Schiller, J. J., y Spellman, D. (2011). Variable compleja: teoría y problemas (Serie Schaum, 2.^a ed.). McGraw-Hill.
- Zill, D. G., y Dewar, J. M. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica (3.^a ed.). McGraw-Hill Interamericana.



MATRICES Y DETERMINANTES COMO **HERRAMIENTAS PARA LA MODELACIÓN Y** **RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE INGENIERÍA**

Proudinat Suárez, José

PTC TecNM / Instituto Tecnológico de Boca del Río
joseproudinat@bdelrio.tecnm.mx

Herrera Triana, Jesús

PTC TecNM / Instituto Tecnológico de Boca del Río
jesusherrera@bdelrio.tecnm.mx

Rodríguez Moreno, Celia Isabel

PT TecNM / Instituto Tecnológico de Boca del Río
celiarodriguez@bdelrio.tecnm.mx

Uscanga Espinosa, Guadalupe

PT TecNM / Instituto Tecnológico de Boca del Río
guadalupeuscanga@bdelrio.tecnm.mx

INTRODUCCIÓN

Las matrices y los determinantes constituyen herramientas fundamentales del álgebra lineal porque permiten representar información organizada y, al mismo tiempo, establecer procedimientos sistemáticos para analizar y resolver problemas que involucran varias cantidades relacionadas. En la formación de estudiantes de ingeniería, estos conceptos no deben entenderse únicamente como operaciones algebraicas aisladas: forman parte de un lenguaje matemático que facilita la representación de sistemas de ecuaciones, transformaciones, modelos de datos y diversos procesos de cálculo.

La problemática que motiva este trabajo se relaciona con la dificultad que presentan algunos estudiantes para pasar de la manipulación simbólica de ecuaciones a una representación matricial que permita identificar con claridad la estructura del problema. Cuando se aprende a sumar matrices, multiplicarlas, calcular una inversa o determinar un determinante solamente como una secuencia de pasos, existe el riesgo de que el procedimiento se aplique de manera mecánica y se pierda de vista la condición que hace válida cada operación. Por ello, resulta pertinente organizar los conceptos de matrices y determinantes desde su significado, propiedades y aplicaciones.

La justificación de este análisis radica en que una comprensión integrada de las matrices favorece el desarrollo del razonamiento algebraico y proporciona herramientas para abordar sistemas de ecuaciones lineales de manera estructurada. Además, el determinante permite establecer condiciones importantes sobre una matriz cuadrada, entre ellas la existencia de una matriz inversa. Esta relación hace que ambos temas se estudien de manera articulada y no como unidades independientes. Los contenidos de la Unidad 2 proporcionada para este trabajo incluyen ecuaciones lineales, sistemas, representación matricial, tipos de matrices, operaciones, transpuesta, producto matricial, matriz inversa y determinantes, elementos que sirven como base para la presente síntesis (Material didáctico de la Unidad 2, s. f.).

El objetivo general de este trabajo es analizar la función de las matrices y los determinantes como herramientas para representar, interpretar y resolver problemas matemáticos relacionados con sistemas de ecuaciones, destacando las condiciones y propiedades que orientan su uso en contextos de ingeniería. De manera particular, se busca relacionar las operaciones matriciales con la solución de sistemas, explicar el papel del determinante en la invertibilidad de una matriz y reconocer procedimientos de cálculo como la eliminación de Gauss-Jordan y la regla de Sarrus dentro del alcance de los problemas estudiados.

El método empleado corresponde a una investigación documental de carácter descriptivo y analítico. Se tomó como fuente principal el material de la Unidad 2 proporcionado, que contiene apuntes y ejercicios sobre matrices y determinantes, y se contrastaron sus contenidos con bibliografía especializada de álgebra lineal. La información fue reorganizada y redactada mediante una síntesis propia, procurando

conservar los conceptos matemáticos esenciales y establecer relaciones entre definición, procedimiento, propiedad y aplicación. No se realizó trabajo de campo ni se utilizaron población o muestra, debido a que el propósito del escrito es de carácter documental.

MARCO TEÓRICO

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales

Una ecuación lineal expresa una relación entre variables en la que cada variable aparece con exponente uno y no se presentan productos entre variables. En varias variables, una forma general es $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$. Esta estructura es especialmente importante porque puede extenderse de una ecuación individual a un sistema de ecuaciones, donde varias relaciones deben cumplirse simultáneamente. Desde la perspectiva del álgebra lineal, el conjunto de ecuaciones puede organizarse de tal manera que los coeficientes, las incógnitas y los términos independientes queden claramente identificados.

Un sistema de ecuaciones lineales puede escribirse como $Ax = b$, donde A contiene los coeficientes, x representa el vector de incógnitas y b contiene los términos independientes. Esta representación no sólo reduce la escritura de un sistema; también permite utilizar operaciones matriciales y transformaciones elementales para estudiar la existencia y naturaleza de sus soluciones. Lay, McDonald y Lay (2021) destacan precisamente la importancia de la relación entre los sistemas lineales y el álgebra matricial como una de las bases del estudio de esta disciplina.

Concepto y estructura de una matriz

Una matriz es una organización rectangular de elementos distribuidos en filas y columnas. Si una matriz tiene m filas y n columnas, se dice que es de orden $m \times n$. Cada elemento puede identificarse mediante dos subíndices: el primero indica la fila y el segundo la columna. Esta forma de organización resulta especialmente útil para almacenar coeficientes de sistemas de ecuaciones y para representar información que necesita ser procesada mediante operaciones algebraicas.

El material de la Unidad 2 distingue matrices nulas, matrices fila, matrices columna, matrices cuadradas, diagonales, triangulares e identidad. Estas clasificaciones no son meramente descriptivas. La dimensión y la estructura de una matriz determinan qué operaciones pueden realizarse y qué propiedades pueden aprovecharse. Por ejemplo, el determinante se define para matrices cuadradas, mientras que una matriz identidad puede actuar como elemento neutro en el producto matricial (Material didáctico de la Unidad 2, s. f.).

Una matriz cuadrada de orden n tiene el mismo número de filas y columnas. Dentro de ella se identifica la diagonal principal, formada por los elementos a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn} . En una matriz diagonal, todos los elementos fuera de esta diagonal son cero. En una matriz triangular superior, los elementos situados debajo de la diagonal principal son cero; en una triangular inferior ocurre lo contrario. La matriz identidad constituye un caso particular de matriz diagonal y se representa por I , con unos en la diagonal principal y ceros en las demás posiciones.

Operaciones con matrices

La suma y la resta de matrices se realizan elemento a elemento y requieren que las matrices tengan las mismas dimensiones. Esta condición expresa una idea central: no basta con que dos objetos tengan forma matricial para que puedan combinarse mediante cualquier operación. La compatibilidad dimensional es una condición matemática que debe verificarse antes de efectuar el cálculo.

El producto de una matriz por un escalar consiste en multiplicar cada uno de sus elementos por el número correspondiente. Esta operación conserva el orden de la matriz y satisface propiedades como la distributividad respecto de la suma. Por su parte, el producto de dos matrices es más restrictivo: si A tiene orden $m \times n$ y B tiene orden $n \times p$, entonces AB existe y produce una matriz de orden $m \times p$. Cada elemento del resultado se obtiene mediante el producto punto entre una fila de A y una columna de B (Anton, Rorres, & Kaul, 2019).

El producto matricial es asociativo y distributivo, pero, en general, no es conmutativo. Es decir, aunque puedan existir AB y BA , no necesariamente se cumple que $AB = BA$. Esta característica es particularmente importante en aplicaciones porque el orden de las operaciones puede modificar el resultado. La comprensión de esta propiedad evita trasladar de manera automática reglas de la aritmética escalar al álgebra matricial.

Transpuesta y matrices simétricas

La transpuesta de una matriz se obtiene intercambiando sus filas por sus columnas. Si A es una matriz $m \times n$, entonces A^T es de orden $n \times m$. Esta operación permite relacionar estructuras que, aunque inicialmente estén organizadas de manera diferente, contienen los mismos elementos. Entre sus propiedades se encuentran $(A^T)^T = A$, $(A + B)^T = A^T + B^T$ y $(kA)^T = kA^T$.

Una matriz cuadrada es simétrica cuando coincide con su transpuesta, es decir, $A^T = A$. Esta condición implica que los elementos situados de manera especular respecto de la diagonal principal son iguales. Las matrices simétricas aparecen con frecuencia en modelos matemáticos y numéricos, por lo que reconocer su estructura permite identificar propiedades útiles antes de realizar operaciones más costosas.

Matriz inversa y sistemas lineales

La matriz inversa constituye el análogo matricial del inverso multiplicativo de un número. Para una matriz cuadrada A , una matriz A^{-1} es inversa de A cuando $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. No todas las matrices cuadradas poseen inversa; la existencia de esta matriz depende de una condición que posteriormente puede expresarse mediante el determinante. Cuando A es invertible, el sistema $Ax = b$ puede transformarse en $x = A^{-1}b$, lo que proporciona una forma compacta de expresar su solución.

El material proporcionado presenta dos procedimientos para obtener la inversa: el método de Gauss-Jordan y el procedimiento basado en determinantes y matriz adjunta. En Gauss-Jordan se construye la matriz aumentada $[A \mid I]$ y se aplican operaciones elementales por filas hasta obtener $[I \mid A^{-1}]$. Este método tiene una ventaja conceptual importante: relaciona directamente el cálculo de la inversa con las mismas transformaciones que se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones (Material didáctico de la Unidad 2, s. f.).

La relación entre inversa y determinante es fundamental. Para una matriz cuadrada A , si $\det(A) \neq 0$, entonces A es invertible; si $\det(A) = 0$, la matriz es singular y no tiene inversa. Strang (2016) presenta esta relación como parte de la estructura central del álgebra lineal, donde la resolución de $Ax = b$, la independencia de las columnas y la invertibilidad están estrechamente vinculadas.

Determinantes

El determinante es un escalar asociado a una matriz cuadrada. Su cálculo proporciona información estructural acerca de la matriz y permite establecer, entre otras condiciones, si ésta es invertible. Para una matriz de orden dos, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, el determinante se obtiene mediante $\det(A) = ad - bc$. Aunque esta expresión es sencilla, constituye la base de procedimientos que se extienden a matrices de mayor orden.

Para matrices de orden superior puede utilizarse la expansión por cofactores. El cofactor asociado con el elemento a_{ij} se expresa como $C_{ij} = (-1)^{(i+j)}M_{ij}$, donde M_{ij} es el menor obtenido al eliminar la fila i y la columna j . De esta forma, el determinante puede desarrollarse a partir de una fila o una columna. La elección de la fila o columna puede aprovechar la presencia de ceros para simplificar el cálculo.

En el caso de matrices de orden tres, la regla de Sarrus constituye un procedimiento directo para organizar los productos positivos y negativos que intervienen en el determinante. Sin embargo, su uso debe limitarse a matrices 3×3 ; no es una regla general para matrices de cualquier orden. El material de la Unidad 2 incorpora esta regla después de trabajar la expansión por cofactores, lo cual permite distinguir entre un procedimiento específico y una formulación general (Material didáctico de la Unidad 2, s. f.).

Los determinantes también cumplen propiedades que permiten anticipar o simplificar resultados. Si una matriz tiene una fila o columna nula, su determinante es cero; si dos filas o columnas son iguales o proporcionales, también es cero. Al multiplicar una fila

por un escalar, el determinante queda multiplicado por ese escalar, mientras que al intercambiar dos filas cambia el signo del determinante. Asimismo, $\det(A^T) = \det(A)$. Estas propiedades convierten al determinante en una herramienta de análisis, no solamente en una operación de cálculo.

Relación entre matrices, determinantes y aplicaciones

La utilidad de las matrices se hace más evidente cuando se consideran como modelos compactos de relaciones. Un sistema de ecuaciones puede transformarse en una expresión matricial; posteriormente, las operaciones elementales permiten simplificarlo y determinar sus soluciones. De manera complementaria, el determinante permite identificar si una matriz cuadrada es singular o invertible. Así, los procedimientos de representación, transformación y análisis forman una cadena lógica en la resolución de problemas.

En ingeniería, esta estructura puede emplearse para organizar balances, relaciones entre variables, modelos de circuitos, problemas de estructuras, análisis de datos y numerosos algoritmos computacionales. Lay et al. (2021) señalan la amplitud de las aplicaciones del álgebra lineal y la necesidad de comprender los conceptos fundamentales antes de pasar a formulaciones más abstractas. En consecuencia, la enseñanza de matrices y determinantes debe favorecer tanto la competencia procedimental como la interpretación del resultado.

Desde una perspectiva didáctica, una estrategia pertinente consiste en presentar cada operación acompañada de tres preguntas: ¿qué representa?, ¿qué condiciones deben cumplirse para efectuarla? y ¿qué información aporta el resultado? Por ejemplo, antes de multiplicar dos matrices debe verificarse la compatibilidad entre columnas de la primera y filas de la segunda; antes de calcular una inversa debe considerarse si la matriz es cuadrada y si su determinante es diferente de cero. Este enfoque ayuda a reducir errores de procedimiento y fortalece la comprensión conceptual.

Desde una perspectiva didáctica, estos ejemplos también permiten evaluar una competencia más amplia que el cálculo. El estudiante debe ser capaz de decidir cuándo una representación matricial es conveniente, justificar el método utilizado y comprobar si el resultado es coherente con las condiciones del problema. Así, las matrices se convierten en un recurso de modelación y no únicamente en un tema de álgebra.

Los ejemplos anteriores muestran que el aprendizaje de matrices y determinantes puede vincularse con problemas donde las variables están relacionadas de manera simultánea. Para un estudiante de ingeniería, resulta conveniente reconocer la secuencia: identificar las variables, formular las ecuaciones, construir la matriz de coeficientes, verificar las dimensiones y condiciones de operación, seleccionar un método de solución e interpretar el resultado en el contexto físico o técnico correspondiente.

Integración de las aplicaciones con la formación del ingeniero

Esta interpretación permite que el determinante deje de verse como una operación puramente numérica. Su valor puede proporcionar información sobre la estructura del modelo: un determinante diferente de cero indica que las columnas de la matriz son linealmente independientes y que, para una matriz cuadrada, existe una inversa. En consecuencia, el cálculo del determinante puede funcionar como una prueba previa antes de seleccionar un procedimiento de solución.

El determinante adquiere significado práctico cuando se utiliza para analizar si una matriz cuadrada es singular o invertible. En los ejemplos anteriores, la existencia de una solución expresada mediante una inversa depende de que $\det(A)$ sea diferente de cero. Por ello, antes de aplicar $A^{-1}b$, es necesario comprobar la condición de invertibilidad. Cuando $\det(A) = 0$, la matriz no tiene inversa y el sistema debe analizarse mediante otros procedimientos para determinar si posee soluciones y cuál es su naturaleza.

Importancia del determinante en las aplicaciones

En un modelo simplificado, si las variables de estado o desplazamiento se agrupan en un vector x y las acciones externas en un vector f , una relación del tipo $Kx = f$ permite expresar de forma compacta el comportamiento del sistema. Cuando K es invertible, puede obtenerse $x = K^{-1}f$. El ejemplo muestra por qué el conocimiento de matrices, productos e inversas constituye una base importante para el estudio posterior de modelos de sistemas de ingeniería.

En ingeniería naval, los métodos matriciales pueden emplearse para organizar sistemas de ecuaciones relacionados con fuerzas, movimientos, estructuras y otros modelos físicos. Un ejemplo conceptual es la representación de las relaciones entre variables de un sistema mecánico mediante una matriz de coeficientes. Dependiendo del modelo, la matriz puede contener parámetros asociados con masas, rigideces, amortiguamiento o interacciones entre componentes.

Ingeniería naval y análisis de sistemas

Por ejemplo, si dos productos requieren diferentes cantidades de horas de mano de obra y de materia prima, una matriz de coeficientes puede contener esos consumos y un vector puede representar los recursos disponibles. La solución del sistema proporciona una estimación de las cantidades de productos que satisfacen simultáneamente las condiciones consideradas. En este contexto, la matriz funciona como una herramienta de organización y modelación de datos.

En ingeniería industrial, las matrices permiten organizar información relacionada con cantidades de productos, consumo de recursos y requerimientos de producción. Un modelo puede establecer cuántas unidades de diferentes recursos se necesitan para fabricar determinados productos. Si se conoce la disponibilidad de los recursos, un

sistema matricial puede ayudar a determinar combinaciones de producción compatibles con esas restricciones.

Ingeniería industrial y modelos de producción

Este ejemplo conecta las matrices con una aplicación geométrica: la operación matricial no sólo combina números, sino que puede representar una transformación del espacio. En problemas mecánicos, esto resulta útil para cambiar entre sistemas de referencia y describir la orientación de componentes o mecanismos.

En ingeniería mecánica, una matriz puede representar transformaciones de coordenadas y relaciones entre componentes de fuerzas y movimientos. Las matrices de rotación, por ejemplo, permiten expresar un vector en un sistema de referencia diferente. Para una rotación plana un ángulo θ , una forma habitual de representación es $R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. Al multiplicar R por un vector de posición o de fuerza se obtiene su representación después de la transformación.

Ingeniería mecánica y sistemas de fuerzas

Por ejemplo, un sistema hipotético de corrientes I_1 , I_2 e I_3 puede expresarse como:

$$10I_1 - 2I_2 = 12$$

$$-2I_1 + 8I_2 - I_3 = 0$$

$$-I_2 + 6I_3 = 6.$$

En forma compacta, el problema queda como $A I = V$. Si la matriz A es invertible, puede obtenerse el vector de corrientes mediante $I = A^{-1}V$. Este ejemplo permite observar de manera directa la relación entre producto matricial, matriz inversa y solución de sistemas lineales.

En ingeniería eléctrica, las matrices pueden emplearse para organizar sistemas de ecuaciones obtenidos a partir de las leyes de Kirchhoff. Cuando un circuito contiene varias corrientes o voltajes desconocidos, las ecuaciones de las mallas o de los nodos pueden escribirse en forma matricial. La matriz de coeficientes reúne las resistencias y relaciones entre las variables, mientras que el vector de términos independientes contiene las fuentes conocidas.

Ingeniería eléctrica y análisis de circuitos

Supóngase un modelo simplificado con tres incógnitas de fuerza F_1 , F_2 y F_3 . El sistema podría representarse como:

$$F_1 + F_2 + F_3 = 12$$

$$2F_1 - F_2 + F_3 = 8$$

$$F_1 + 2F_2 - F_3 = 5.$$

La representación matricial permite aplicar eliminación de Gauss-Jordan para transformar el sistema y obtener los valores de las fuerzas. El interés de la matriz no está solamente en hacer más corta la escritura, sino en proporcionar una estructura adecuada para procedimientos sistemáticos de solución.

En ingeniería civil, los sistemas de ecuaciones lineales pueden utilizarse para representar relaciones entre fuerzas, desplazamientos y reacciones en una estructura. Por ejemplo, al analizar una estructura simplificada, pueden obtenerse varias ecuaciones de equilibrio cuyas incógnitas sean las fuerzas internas de diferentes elementos. Estas ecuaciones pueden organizarse como $Ax = b$, donde A contiene los coeficientes asociados con las condiciones de equilibrio, x representa las fuerzas desconocidas y b contiene los términos conocidos.

Ingeniería civil y análisis de estructuras

Las matrices adquieren especial relevancia cuando un problema de ingeniería contiene varias variables que deben analizarse de manera simultánea. En lugar de trabajar con cada ecuación de forma independiente, la representación matricial permite organizar coeficientes, variables y resultados en una estructura única. Los siguientes ejemplos son aplicaciones ilustrativas construidas a partir de los conceptos de la Unidad 2 y complementadas con conocimiento general de las áreas de ingeniería.

APLICACIONES DE LAS MATRICES Y LOS DETERMINANTES EN ÁREAS DE LA INGENIERÍA

CONCLUSIONES

El análisis realizado permite reconocer que matrices y determinantes forman un sistema conceptual integrado. Las matrices proporcionan una forma estructurada de representar información y relaciones entre variables, mientras que las operaciones matriciales permiten transformar y combinar dicha información de acuerdo con reglas específicas. Por su parte, los determinantes aportan información sobre matrices cuadradas y establecen una condición decisiva para determinar su invertibilidad.

La principal aportación de estudiar estos contenidos de manera articulada consiste en pasar de la ejecución mecánica de algoritmos a la comprensión de las condiciones que justifican cada procedimiento. La compatibilidad dimensional en la suma y el producto, las propiedades de la transpuesta, la construcción de la inversa mediante Gauss-Jordan y la relación $\det(A) \neq 0$ con la invertibilidad constituyen elementos que deben interpretarse conjuntamente.

En el contexto de la formación en ingeniería, esta comprensión es relevante porque los procedimientos matriciales sirven como base para modelos y métodos posteriores. Por ello, el aprendizaje de la Unidad 2 puede fortalecerse mediante problemas en los que el estudiante no sólo calcule un resultado, sino que explique por qué una operación es válida, interprete el resultado obtenido y seleccione el procedimiento más conveniente. De esta manera, matrices y determinantes dejan de ser un conjunto de reglas aisladas y se convierten en herramientas para modelar y resolver problemas.

REFERENCIAS

- Anton, H., Rorres, C., & Kaul, A. (2019). *Elementary linear algebra: Applications version* (12th ed.). Wiley.
- Lay, D. C., McDonald, J. J., & Lay, S. R. (2021). *Linear algebra and its applications* (6th ed.). Pearson.
- Strang, G. (2016). *Introduction to linear algebra* (5th ed.). Wellesley-Cambridge Press.
- Material didáctico de la Unidad 2. (s. f.). *Matrices y determinantes* [Apuntes de clase].



SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: FUNDAMENTOS, MÉTODOS DE SOLUCIÓN Y APLICACIONES

Valenzuela Castillo, Carlos Miguel

PA TecNM / Instituto Tecnológico de Boca del Río
carlosvalenzuela@bdelrio.tecnm.mx

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales constituyen una de las herramientas matemáticas más importantes para describir fenómenos en las ciencias, la ingeniería, la economía y otras disciplinas. A diferencia de una ecuación con una sola incógnita, un sistema de ecuaciones lineales permite modelar situaciones en las que intervienen varias variables relacionadas entre sí, cuyas soluciones deben satisfacer simultáneamente un conjunto de condiciones. Esta capacidad de representar múltiples relaciones hace que los sistemas de ecuaciones sean fundamentales para la modelación y el análisis de problemas reales.

El estudio de los sistemas de ecuaciones tiene sus orígenes en las primeras civilizaciones, que desarrollaron procedimientos para resolver problemas de reparto, comercio y medición. Con el desarrollo del álgebra moderna, estos métodos fueron perfeccionados hasta dar lugar a técnicas sistemáticas como la eliminación de Gauss, uno de los algoritmos más importantes del álgebra lineal y base de numerosos métodos computacionales utilizados en la actualidad.

La importancia de los sistemas de ecuaciones lineales trasciende el ámbito matemático. En ingeniería eléctrica permiten determinar corrientes y voltajes en circuitos; en ingeniería civil se emplean para analizar estructuras; en ingeniería mecánica intervienen en el estudio del equilibrio de fuerzas; mientras que, en áreas como la economía, la investigación de operaciones y la ciencia de datos constituyen herramientas esenciales para la optimización de procesos y la toma de decisiones. En todos estos casos, la solución de un sistema proporciona información indispensable para comprender y resolver problemas complejos.

En este capítulo se presentan los fundamentos de los sistemas de ecuaciones lineales, comenzando con su definición formal y la clasificación de los diferentes tipos de sistemas según el número de soluciones que poseen. Posteriormente, se aborda la interpretación geométrica de dichas soluciones, lo que permite relacionar los procedimientos algebraicos con la intersección de rectas y planos. Finalmente, se desarrollan los principales métodos de solución: la eliminación de Gauss, el método de Gauss-Jordan, la resolución mediante la matriz inversa y la regla de Cramer. El propósito es que el lector comprenda los principios matemáticos que sustentan estos procedimientos y reconozca su importancia como una de las bases del álgebra lineal y de la modelación de problemas en la ingeniería y las ciencias.

JUSTIFICACIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales constituyen una herramienta fundamental del álgebra lineal, ya que permiten modelar y resolver problemas en los que intervienen varias variables relacionadas entre sí. Su estudio es indispensable para comprender

numerosos fenómenos presentes en la ingeniería, las ciencias y otras áreas del conocimiento.

En ingeniería, estos sistemas se emplean en el análisis de circuitos eléctricos, estructuras, procesos industriales, balances de materia y energía, así como en el desarrollo de modelos matemáticos para la automatización y el control. Además, son la base de diversos algoritmos utilizados en la computación científica, la optimización y el análisis de datos.

Desde el punto de vista académico, el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales facilita la comprensión de conceptos posteriores del álgebra lineal, como matrices, determinantes y transformaciones lineales. Por ello, resulta indispensable abordar sus fundamentos, su interpretación geométrica y los principales métodos de solución, proporcionando al lector herramientas matemáticas esenciales para analizar y resolver problemas propios de la ingeniería y las ciencias.

OBJETIVOS

Objetivo general

Analizar los fundamentos de los sistemas de ecuaciones lineales, su clasificación, interpretación geométrica y los principales métodos de solución, con el propósito de que el lector adquiera las herramientas matemáticas necesarias para resolver problemas y comprender su aplicación en el álgebra lineal y en diversas áreas de la ingeniería y las ciencias.

Objetivos específicos

- Definir el concepto de sistema de ecuaciones lineales e identificar sus elementos fundamentales y su representación algebraica y matricial.
- Clasificar los sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo con el número de soluciones e interpretar el significado de cada caso.
- Explicar la interpretación geométrica de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales en dos y tres dimensiones.
- Desarrollar los procedimientos de solución mediante los métodos de eliminación de Gauss, Gauss-Jordan, matriz inversa y regla de Cramer.
- Reconocer la importancia de los sistemas de ecuaciones lineales como herramienta para la modelación y resolución de problemas en la ingeniería y las ciencias.

MÉTODO

El desarrollo de este capítulo sigue un enfoque expositivo-deductivo, orientado a facilitar la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales mediante una secuencia lógica que parte de los conceptos fundamentales y avanza hacia los principales métodos de solución. En primer lugar, se presenta la definición de un sistema de ecuaciones lineales y su representación algebraica y matricial, estableciendo las bases necesarias para el análisis posterior. A continuación, se describen los diferentes tipos de sistemas de acuerdo con el número de soluciones y se interpreta su significado desde una perspectiva geométrica.

Posteriormente, se desarrollan los métodos de eliminación de Gauss, Gauss-Jordan, matriz inversa y regla de Cramer, explicando los fundamentos matemáticos de cada procedimiento y ejemplificando su aplicación mediante ejercicios resueltos. Finalmente, se destacan las principales aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales en la ingeniería y las ciencias, con el propósito de relacionar los conceptos teóricos con situaciones reales.

Origen e importancia de los sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales surgieron como una respuesta a la necesidad de resolver problemas que involucraban varias cantidades desconocidas relacionadas entre sí. Desde las primeras civilizaciones, el ser humano enfrentó situaciones relacionadas con el comercio, la distribución de recursos, la agricultura y la construcción, en las que era necesario determinar valores desconocidos a partir de un conjunto de condiciones. Estas situaciones dieron origen a procedimientos matemáticos que, aunque rudimentarios, representan los antecedentes de los métodos actuales para resolver sistemas de ecuaciones.

Uno de los registros más antiguos se encuentra en tablillas babilónicas, fechadas aproximadamente entre los años 2000 y 1600 a. C., donde aparecen problemas equivalentes a sistemas de ecuaciones lineales resueltos mediante procedimientos aritméticos. Siglos después, en China, la obra *Los nueve capítulos sobre el arte matemático* describió métodos organizados para resolver sistemas con varias incógnitas utilizando arreglos numéricos semejantes a las matrices modernas y procedimientos muy similares a la eliminación de Gauss. Durante los siglos XVII y XVIII, el desarrollo del álgebra simbólica permitió expresar estos problemas de manera general, mientras que en el siglo XIX Carl Friedrich Gauss formalizó el método de eliminación que lleva su nombre, considerado uno de los algoritmos fundamentales del álgebra lineal.

En la actualidad, los sistemas de ecuaciones lineales constituyen una herramienta esencial para la modelación matemática. Su aplicación abarca áreas como la ingeniería eléctrica, el análisis estructural, la mecánica, la economía, la investigación de operaciones, la computación y la ciencia de datos. Además de permitir la resolución

de problemas prácticos, su estudio proporciona las bases para comprender conceptos fundamentales del álgebra lineal, como las matrices, los determinantes, las transformaciones lineales y los espacios vectoriales. Por ello, representan uno de los temas más importantes en la formación matemática de ingenieros y científicos.

Definición de un sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales que comparten las mismas incógnitas y cuya solución debe satisfacer simultáneamente cada una de ellas. En otras palabras, los valores de las variables deben cumplir todas las ecuaciones del sistema al mismo tiempo, no únicamente una de ellas. Esta característica distingue a los sistemas de ecuaciones lineales de las ecuaciones aisladas y los convierte en una herramienta fundamental para modelar problemas donde intervienen varias variables relacionadas entre sí.

De manera general, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede representarse como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

En esta expresión, los valores a_{ij} reciben el nombre de coeficientes del sistema, $x_1, x_2, \dots, x_n$ representan las incógnitas o variables por determinar y $b_1, b_2, \dots, b_m$ son los términos independientes, que corresponden a los valores conocidos de cada ecuación. Una ecuación se considera lineal cuando cada incógnita aparece únicamente elevada a la primera potencia y no existen productos entre variables, exponentes distintos de uno ni funciones trascendentes. Gracias a estas características, las ecuaciones lineales pueden representarse geoméricamente mediante rectas, planos o hiperplanos, dependiendo del número de variables involucradas.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales consiste en encontrar el conjunto de valores de las incógnitas que satisface simultáneamente todas las ecuaciones que lo conforman. Dependiendo de la relación existente entre las ecuaciones, un sistema puede tener una única solución, un número infinito de soluciones o no tener solución. Estas posibilidades serán analizadas en los apartados siguientes, junto con su interpretación geométrica y los métodos algebraicos utilizados para determinar la solución de un sistema.

Representación algebraica y matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales puede representarse de diferentes formas, siendo las más utilizadas la representación algebraica y la representación matricial. Ambas describen el mismo sistema; sin embargo, la representación matricial permite expresar

la información de manera más compacta y facilita la aplicación de diversos métodos de solución propios del álgebra lineal.

La representación algebraica consiste en escribir cada una de las ecuaciones que integran el sistema de forma explícita. Por ejemplo, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas puede expresarse como:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ 3x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

En este sistema, **x**, **y** y **z** representan las incógnitas; los números que las acompañan corresponden a los coeficientes de cada ecuación, mientras que los valores ubicados al lado derecho del signo de igualdad constituyen los términos independientes.

A partir de esta representación es posible organizar los coeficientes y los términos independientes en arreglos rectangulares denominados matrices, obteniendo así la representación matricial del sistema. De forma general, un sistema de ecuaciones lineales puede escribirse mediante la expresión:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

donde **A** es la matriz de coeficientes, **X** es el vector columna de incógnitas y **B** es el vector columna de términos independientes.

Esta notación resume toda la información del sistema en una sola expresión matemática y constituye la base para métodos de solución como la eliminación de Gauss, Gauss-Jordan y el método de la matriz inversa. Además, permite que los sistemas de ecuaciones sean resueltos de manera eficiente mediante algoritmos computacionales, razón por la cual es ampliamente utilizada en programas de cálculo científico y software especializado en ingeniería.

La representación matricial no modifica el sistema original ni sus soluciones; simplemente proporciona una forma más ordenada y eficiente de expresar las relaciones entre las variables. Por ello, constituye una de las herramientas fundamentales del álgebra lineal moderna y un paso indispensable para comprender los procedimientos de resolución que se desarrollarán en los apartados siguientes.

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden clasificarse con base en diferentes criterios, de los cuales el más fundamental es el número de soluciones que poseen.

De acuerdo con el Teorema de Rouché-Frobenius (o la estructura de consistencia en el álgebra lineal), un sistema de ecuaciones lineales $Ax = B$ cae estrictamente en una de tres categorías posibles: poseer una única solución, poseer infinitas soluciones o no tener ninguna solución.

En función de la existencia o no de solución, los sistemas se dividen de forma general en compatibles (o consistentes) e incompatibles (o inconsistentes).

Sistema compatible determinado

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado (o consistente determinado) si posee una única solución.

Desde una perspectiva algebraica, esto significa que existe un solo vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ de constantes reales o complejas que satisface simultáneamente todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

Condiciones matemáticas

Para un sistema cuadrado de $n \times n$ (con n ecuaciones y n incógnitas):

- La matriz de coeficientes A es no singular o invertible, lo que equivale a decir que su determinante es diferente de cero ($\det(A) \neq 0$).
- El rango de la matriz de coeficientes A es igual al rango de la matriz aumentada $[A \mid B]$, e igual al número total de incógnitas n :

$$\text{rango}(A) = \text{rango}([A \mid B]) = n$$

Ejemplo representativo (2×2):

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Al resolver este sistema se obtiene únicamente la pareja de valores $x = 2$ e $y = 1$. No existe ningún otro par de números que cumpla ambas igualdades al mismo tiempo.

Sistema compatible indeterminado

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado (o consistente indeterminado) cuando tiene un número infinito de soluciones.

Esto ocurre cuando las ecuaciones del sistema no aportan información totalmente independiente entre sí; es decir, existen ecuaciones dependientes o redundantes. Al resolver el sistema mediante eliminación gaussiana, al menos una variable queda expresada libremente sin una restricción fija, convirtiéndose en un parámetro (generalmente denotado por letras como $t, s, r \in \mathbb{R}$).

Condiciones matemáticas

Un sistema admite infinitas soluciones cuando el rango de la matriz de coeficientes A es igual al rango de la matriz aumentada $[A \mid B]$, pero este valor es estrictamente menor que el número de incógnitas n :

$$\text{rango}(A) = \text{rango}([A \mid B]) = r < n$$

La diferencia $n - r$ representa el número de **variables libres** o parámetros necesarios para describir la solución general del sistema.

Ejemplo representativo (2×2):

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Observa que la segunda ecuación es simplemente la primera multiplicada por 2. Si despejamos y en términos de un parámetro t , el conjunto solución se expresa de forma paramétrica como:

$$x = t, \quad y = 2 - t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Asignando cualquier valor a t , se obtiene una solución válida distinta (por ejemplo, $(0,2)$, $(1,1)$, $(-5,7)$, etc.).

Sistema incompatible

Un sistema de ecuaciones lineales se denomina incompatible (o inconsistente) cuando no posee solución. Esto indica que las condiciones planteadas por las ecuaciones son contradictorias entre sí, haciendo matemáticamente imposible hallar valores para las incógnitas que satisfagan todo el sistema simultáneamente.

Durante el proceso algebraico de resolución (por ejemplo, mediante la eliminación gaussiana), la incompatibilidad se manifiesta de forma explícita al llegar a una contradicción del tipo:

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = k \quad (\text{donde } k \neq 0)$$

es decir, una ecuación aberrante de la forma $0 = k$.

Condiciones matemáticas

Un sistema es incompatible si el rango de la matriz de coeficientes A es menor que el rango de la matriz aumentada $[A \mid B]$:

$$\text{rango}(A) < \text{rango}([A \mid B])$$

Ejemplo representativo (2×2):

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Este sistema es claramente contradictorio: la suma de dos números no puede ser simultáneamente igual a 3 e igual a 5. No existe ningún par (x, y) que cumpla ambas condiciones.

Interpretación geométrica de las soluciones

La interpretación geométrica permite trasladar los conceptos algebraicos de los sistemas de ecuaciones lineales a representaciones visuales en el espacio euclidiano. Cada ecuación lineal representa un lugar geométrico (rectas en dos dimensiones, planos en tres dimensiones o hiperplanos en n dimensiones), y hallar la solución del sistema equivale a determinar el conjunto de puntos en los que dichos lugares geométricos se intersectan simultáneamente.

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (2×2) adopta la forma general:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

En el plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$), cada una de estas ecuaciones representa una **recta**. Por lo tanto, la solución del sistema corresponde al conjunto de puntos (x,y) que pertenecen a ambas rectas al mismo tiempo. Existen exactamente tres casos posibles:

Rectas Secantes

Rectas Paralelas

Rectas Coincidentes

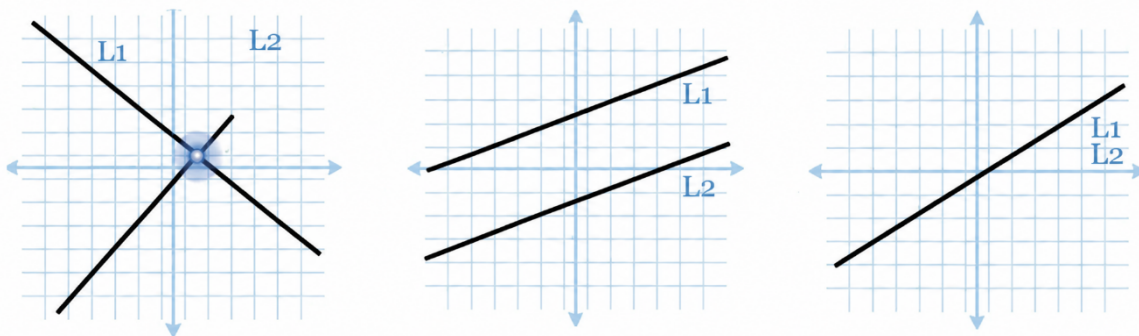


Fig 1.- Representación grafica de los tipos de sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas. Elaboración propia

1. Rectas secantes (Sistema Compatible Determinado):

- **Comportamiento geométrico:** Las dos rectas tienen pendientes distintas ($m_1 \neq m_2$) y se cortan en un único punto (x_0, y_0) .
- **Interpretación:** Existe una única pareja ordenada que satisface ambas ecuaciones.

2. Rectas paralelas no coincidentes (Sistema Incompatible):

- **Comportamiento geométrico:** Las dos rectas tienen la misma pendiente ($m_1 = m_2$), pero distinta ordenada al origen ($b_1 \neq b_2$). Por tanto, nunca se intersectan.
- **Interpretación:** No existe ningún punto en el plano común a ambas rectas; el sistema no tiene solución.

3. Rectas coincidentes (Sistema Compatible Indeterminado):

- **Comportamiento geométrico:** Ambas ecuaciones representan, en realidad, la misma recta (una ecuación es múltiplo escalar de la otra).
- **Interpretación:** Todos los puntos que pertenecen a la recta son soluciones del sistema, resultando en un número infinito de soluciones.

Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas (3×3) se expresa de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

En el espacio tridimensional ($\mathbb{R}^3$), cada una de estas ecuaciones representa un plano. Resolver el sistema equivale a determinar la intersección común a los tres planos.

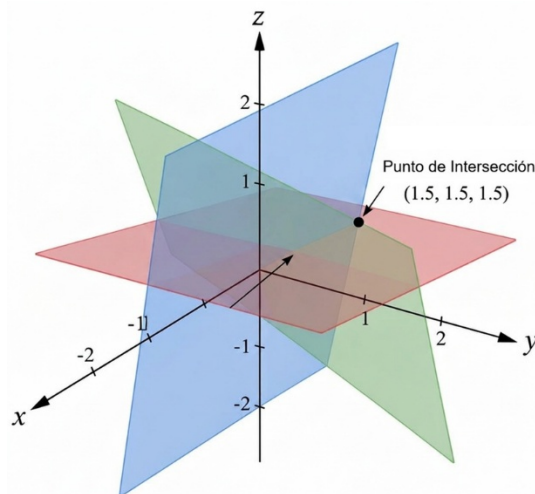


Fig 2.- Representación gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales de 3 incógnitas. Elaboración propia

1. Sistema Compatible Determinado (Solución Única)

Los tres planos se intersecan en un único punto $P(x_0, y_0, z_0)$. Esto ocurre cuando los vectores normales de los tres planos son linealmente independientes, lo que algebraicamente equivale a que el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de cero ($\det(A) \neq 0$).

2. Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones)

Existen dos configuraciones geométricas posibles en las que los tres planos comparten infinitos puntos:

- **Intersección en una recta (Un parámetro libre):** Los tres planos se cortan a lo largo de una misma recta común. Las soluciones se expresan mediante un parámetro $t \in \mathbb{R}$.
- **Planos coincidentes (Dos parámetros libres):** Los tres planos corresponden geoméricamente al mismo plano. Todos los puntos sobre dicho plano son soluciones del sistema, requiriendo dos parámetros $(t, s \in \mathbb{R})$ para describir la solución.

3. Sistema Incompatible (Sin Solución)

El sistema no tiene solución cuando no existe ningún punto común a los tres planos simultáneamente. Geométricamente, esto puede ocurrir de diversas maneras:

- **Planos paralelos:** Los tres planos son paralelos entre sí y no se intersecan.
- **Intersección en pares (Prisma triangular):** Dos a dos, los planos se intersecan formando rectas de intersección paralelas, pero los tres planos juntos no comparten un solo punto común.
- **Dos planos paralelos cortados por un tercero:** Dos planos son paralelos entre sí y el tercero los interseca en dos rectas distintas paralelas.

Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales

Resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma $Ax = B$ consiste en encontrar el conjunto de todos los vectores x que satisfacen simultáneamente cada una de las ecuaciones del sistema. Para lograrlo de forma sistemática, el álgebra lineal emplea algoritmos basados en la transformación del sistema original en un sistema equivalente (que posee exactamente las mismas soluciones) pero de estructura más sencilla.

Estas transformaciones se logran mediante las operaciones elementales por fila aplicadas a la matriz aumentada del sistema $[A \mid B]$:

1. **Intercambio:** Intercambiar la posición de dos filas ($F_i \leftrightarrow F_j$).
2. **Escalamiento:** Multiplicar una fila por una constante no nula ($k \cdot F_i \rightarrow F_i$, con $k \neq 0$).
3. **Sustitución (o Suma):** Sumar a una fila el múltiplo escalar de otra ($F_i + k \cdot F_j \rightarrow F_i$).

Método de eliminación de Gauss

El método de eliminación de Gauss (o eliminación gaussiana) es un algoritmo fundamental del álgebra lineal formalizado por Carl Friedrich Gauss. Consiste en transformar la matriz aumentada $[A \mid B]$ en una matriz escalonada por filas mediante la aplicación sucesiva de operaciones elementales.

Una matriz se encuentra en forma escalonada por filas si cumple con las siguientes propiedades:

- Todas las filas compuestas totalmente por ceros (si las hay) se ubican en la parte inferior de la matriz.
- El primer elemento distinto de cero de cada fila no nula (llamado pivote) se encuentra estrictamente a la derecha del pivote de la fila anterior.

Una vez que la matriz aumentada se encuentra en forma escalonada, el sistema resultante representa un sistema triangular superior, el cual se resuelve fácilmente mediante el proceso de sustitución hacia atrás (despejando las incógnitas desde la última fila hacia la primera).

Ejercicio resuelto paso a paso

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales 3×3 utilizando el método de eliminación de Gauss:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ 4x + 3y + z = 11 \\ -2x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$$

Paso 1: Construcción de la matriz aumentada

$$[A | B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 11 \\ -2 & 2 & 3 & -3 \end{array} \right]$$

Paso 2: Eliminación hacia adelante (Hacer ceros en la primera columna)

Tomamos como pivote el elemento $a_{11} = 2$.

- Para hacer cero el elemento $a_{21} = 4$, aplicamos la operación: $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$
- Para hacer cero el elemento $a_{31} = -2$, aplicamos la operación: $F_3 \rightarrow F_3 + F_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

Paso 3: Hacer ceros en la segunda columna

Tomamos como nuevo pivote el elemento $a_{22} = 1$.

- Para hacer cero el elemento $a_{32} = 3$, aplicamos la operación: $F_3 \rightarrow F_3 - 3F_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 20 \end{array} \right]$$

La matriz se encuentra ahora en **forma escalonada por filas**.

Paso 4: Sustitución hacia atrás

Escribimos el sistema de ecuaciones equivalente a partir de la matriz escalonada:

$$1. \text{ De la tercera fila: } -7z = 20 \Rightarrow z = -\frac{20}{7}$$

$$2. \text{ De la segunda fila: } y + 3z = -5$$

$$y + 3\left(-\frac{20}{7}\right) = -5 \Rightarrow y - \frac{60}{7} = -5 \Rightarrow y = -5 + \frac{60}{7} = \frac{25}{7}$$

$$3. \text{ De la primera fila: } 2x + y - z = 8$$

$$2x + \frac{25}{7} - \left(-\frac{20}{7}\right) = 8 \Rightarrow 2x + \frac{45}{7} = 8 \Rightarrow 2x = 8 - \frac{45}{7} = \frac{11}{7} \Rightarrow x = \frac{11}{14}$$

Conjunto solución:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{14} \\ \frac{25}{7} \\ -\frac{20}{7} \end{bmatrix}$$

El sistema es compatible determinado y posee una única solución.

Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan es una variación y extensión directa del método de eliminación de Gauss. Fue desarrollado por el matemático Wilhelm Jordan en 1888 como un procedimiento más sistemático para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y el cálculo de matrices inversas.

A diferencia de la eliminación gaussiana clásica —que transforma la matriz aumentada en una forma escalonada para luego aplicar sustitución hacia atrás—, el método de Gauss-Jordan continúa aplicando operaciones elementales por fila hasta transformar la matriz de coeficientes A en una matriz escalonada reducida por filas (que en el caso de sistemas cuadrados compatibles determinados corresponde a la matriz identidad I).

Una matriz se encuentra en forma escalonada reducida por filas si satisface las siguientes condiciones:

1. Cumple con todas las propiedades de una matriz escalonada por filas.
2. El primer elemento no nulo de cada fila (el pivote) es exactamente igual a 1 (pivote unitario).
3. En cada columna que contiene un pivote unitario, todos los demás elementos son iguales a cero (tanto por debajo como por encima del pivote).

La gran ventaja operacional de este procedimiento radica en que, al finalizar el algoritmo, los valores de las incógnitas se obtienen de manera directa en la columna de términos independientes, eliminando la necesidad de realizar el proceso de sustitución hacia atrás.

Ejercicio resuelto paso a paso

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales 3×3 utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 4x + y - z = 9 \\ 2x + 2y + 3z = 15 \end{cases}$$

Paso 1: Planteamiento de la matriz aumentada

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{array} \right]$$

Paso 2: Normalizar el pivote a_{11} y hacer ceros en la columna 1

Normalizamos la primera fila dividiendo entre 2 ($F_1 \rightarrow \frac{1}{2}F_1$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{array} \right]$$

Ahora hacemos ceros debajo del pivote en la columna 1:

- $F_2 \rightarrow F_2 - 4F_1$
- $F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \end{array} \right]$$

Paso 3: Normalizar el pivote a_{22} y hacer ceros en la columna 2 (arriba y abajo)

Normalizamos el segundo pivote dividiendo la segunda fila entre 3 ($F_2 \rightarrow \frac{1}{3}F_2$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \end{array} \right]$$

Hacemos ceros por encima y por debajo del pivote a_{22} :

- $F_1 \rightarrow F_1 + \frac{1}{2}F_2$
- $F_3 \rightarrow F_3 - 3F_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \end{array} \right]$$

Paso 4: Normalizar el pivote a_{33} y hacer ceros en la columna 3

Normalizamos el tercer pivote dividiendo la tercera fila entre 5 ($F_3 \rightarrow \frac{1}{5}F_3$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{5} \end{array} \right]$$

Hacemos cero el elemento por encima del pivote en la posición a_{23} :

- $F_2 \rightarrow F_2 + F_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{5} \end{array} \right]$$

Paso 5: Lectura directa de la solución

La matriz se encuentra en su forma escalonada reducida por filas $[I | B']$, por lo que el conjunto solución se lee de manera inmediata:

$$x = 2, \quad y = \frac{14}{5}, \quad z = \frac{9}{5}$$

Método de la matriz inversa

El método de la matriz inversa es un procedimiento matricial directo aplicable a sistemas de ecuaciones lineales cuadrados (es decir, aquellos con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, $n \times n$). Este método se fundamenta en la teoría de transformaciones lineales y propiedades de las matrices invertibles del álgebra lineal. Partiendo de la representación matricial general del sistema de ecuaciones lineales:

$$Ax = B$$

donde:

- A es la matriz cuadrada de coeficientes de dimensión $n \times n$.
- x es el vector columna de incógnitas de dimensión $n \times 1$.
- B es el vector columna de términos independientes de dimensión $n \times 1$.

Fundamento matemático y deducción

Si la matriz de coeficientes A es no singular (o invertible), existe una única matriz A^{-1} de dimensión $n \times n$ tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

donde I_n representa la matriz identidad de orden n . Multiplicando por la izquierda ambos miembros de la ecuación matricial $Ax = B$ por la inversa A^{-1} , se obtiene:

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}B$$

Aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices:

$$(A^{-1}A)x = A^{-1}B$$

Dado que $A^{-1}A = I_n$:

$$I_n x = A^{-1}B$$

Por la propiedad del elemento neutro de la matriz identidad ($I_n x = x$), la solución del sistema se expresa de forma explícita mediante la fórmula:

$$x = A^{-1}B$$

Condición de aplicabilidad: Para que un sistema pueda resolverse mediante este método, es condición necesaria y suficiente que la matriz A sea invertible, lo cual equivale algebraicamente a que su determinante sea distinto de cero ($\det(A) \neq 0$). Si $\det(A) = 0$, la matriz es singular (no tiene inversa) y el método no puede emplearse.

Cálculo de la matriz inversa mediante la matriz adjunta

Para determinar A^{-1} , uno de los procedimientos analíticos más utilizados se basa en el cálculo del determinante y la matriz de cofactores (o adjunta):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)$$

donde $\text{Adj}(A) = C^T$, siendo C la matriz compuesta por los cofactores $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ de la matriz A .

Ejercicio resuelto paso a paso

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales 3×3 utilizando el método de la matriz inversa:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x + 5y + 2z = 19 \\ 3x + 8y + 4z = 29 \end{cases}$$

Paso 1: Representación matricial del sistema

Expresamos el sistema en la forma $Ax = B$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Cálculo del determinante de la matriz de coeficientes ($\det(A)$)

Aplicamos la expansión por cofactores a lo largo de la primera fila:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Sustituyendo estos valores:

$$\det(A) = 1(4) - 2(2) + 1(1) = 4 - 4 + 1 = 1$$

Como $\det(A) = 1 \neq 0$, la matriz de coeficientes A es no singular (invertible) y el sistema tiene una solución única.

Paso 3: Obtención de la matriz de cofactores (C) y la matriz adjunta ($\text{Adj}(A)$)

Calculamos los 9 cofactores mediante la fórmula $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$:

• Fila 1:

- $C_{11} = +((5)(4) - (2)(8)) = +(20 - 16) = 4$
- $C_{12} = -((2)(4) - (2)(3)) = -(8 - 6) = -2$
- $C_{13} = +((2)(8) - (5)(3)) = +(16 - 15) = 1$

• Fila 2:

- $C_{21} = -((2)(4) - (1)(8)) = -(8 - 8) = 0$
- $C_{22} = +((1)(4) - (1)(3)) = +(4 - 3) = 1$
- $C_{23} = -((1)(8) - (2)(3)) = -(8 - 6) = -2$

• Fila 3:

- $C_{31} = +((2)(2) - (1)(5)) = +(4 - 5) = -1$
- $C_{32} = -((1)(2) - (1)(2)) = -(2 - 2) = 0$
- $C_{33} = +((1)(5) - (2)(2)) = +(5 - 4) = 1$

Construimos la **matriz de cofactores** C :

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La **matriz adjunta** $\text{Adj}(A)$ es la traspuesta de la matriz de cofactores (C^T):

$$\text{Adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Construcción de la matriz inversa (A^{-1})

Utilizando la relación $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)$ y sabiendo que $\det(A) = 1$:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 5: Cálculo del vector solución ($\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{B}$)

Multiplicamos la matriz inversa A^{-1} por el vector de términos independientes $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Efectuamos el producto fila por columna:

- $x = (4)(8) + (0)(19) + (-1)(29) = 32 + 0 - 29 = 3$
- $y = (-2)(8) + (1)(19) + (0)(29) = -16 + 19 + 0 = 3$
- $z = (1)(8) + (-2)(19) + (1)(29) = 8 - 38 + 29 = -1$

Obteniendo el **vector columna solución**:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Regla de Cramer

La regla de Cramer es un método analítico explícito para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales cuadrados (con igual número de ecuaciones que de incógnitas, $n \times n$). Recibe su nombre en honor al matemático suizo Gabriel Cramer, quien la publicó en 1750. Este procedimiento utiliza exclusivamente el cálculo de determinantes para expresar el valor de cada incógnita de forma directa mediante un cociente.

Partiendo del sistema lineal en su notación matricial general $A\mathbf{x} = \mathbf{B}$:

Teorema de Cramer y fundamento matemático

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$. Si el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero ($\det(A) \neq 0$), el sistema posee una solución única (compatible determinado), y el valor de cada incógnita x_i (para $i = 1, 2, \dots, n$) viene dado por la fórmula:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

donde A_i representa la matriz que resulta de reemplazar la i -ésima columna de la matriz de coeficientes A por el vector columna de términos independientes $\mathbf{B}$:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow \text{Columna } i$$

Criterio de aplicabilidad y limitaciones:

1. La regla de Cramer requiere estrictamente que el sistema sea cuadrado ($n \times n$) y que $\det(A) \neq 0$.
2. Si $\det(A) = 0$, la regla no se puede aplicar directamente para calcular la solución. En este escenario, el sistema será incompatible o compatible indeterminado, lo cual deberá evaluarse mediante otros métodos (como la eliminación gaussiana).
3. Aunque es conceptualmente elegante y útil para análisis teóricos o sistemas pequeños (2×2 o 3×3), la regla de Cramer es computacionalmente ineficiente para sistemas de gran escala ($n > 4$), ya que el costo computacional para calcular $n + 1$ determinantes de orden n crece factorialmente ($O((n + 1)!)$).

Ejercicio resuelto paso a paso

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales 3×3 utilizando la Regla de Cramer:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 2y + z = 12 \\ 3x - y + 2z = 9 \end{cases}$$

Paso 1: Matriz de coeficientes y vector de términos independientes

Extraemos la matriz A y el vector B :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Cálculo del determinante principal ($\det(A)$)

Evaluamos el determinante de la matriz de coeficientes A aplicando la Regla de Sarrus o expansión por cofactores en la primera fila:

$$\det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Calculamos los determinantes 2×2 :

$$\det(A) = 2(5) - 1(-1) - 1(-7) = 10 + 1 + 7 = 18$$

Como $\det(A) = 18 \neq 0$, el sistema es compatible determinado (posee una única solución) y es posible aplicar la Regla de Cramer.

Paso 3: Construcción y cálculo de los determinantes auxiliares ($\det(A_x)$, $\det(A_y)$, $\det(A_z)$)

- **Para la incógnita x ($\det(A_x)$):** Reemplazamos la primera columna de A por B :

$$A_x = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 12 & 2 & 1 \\ 9 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_x) = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A_x) &= 3(4 + 1) - 1(24 - 9) - 1(-12 - 18) = 3(5) - 1(15) - 1(-30) \\ &= 15 - 15 + 30 = 30 \end{aligned}$$

- **Para la incógnita y ($\det(A_y)$):** Reemplazamos la segunda columna de A por B :

$$A_y = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_y) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_y) = 2(24 - 9) - 3(2 - 3) - 1(9 - 36) = 2(15) - 3(-1) - 1(-27) = 30 + 3 + 27 = 60$$

- **Para la incógnita z ($\det(A_z)$):** Reemplazamos la tercera columna de A por B :

$$A_z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 12 \\ 3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_z) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_z) = 2(18 - (-12)) - 1(9 - 36) + 3(-1 - 6) = 2(30) - 1(-27) + 3(-7) = 60 + 27 - 21 = 66$$

Paso 4: Obtención de los valores de las incógnitas

Aplicamos la fórmula del cociente de la Regla de Cramer:

- **Para x :**

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$$

- **Para y :**

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}$$

- **Para z :**

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{66}{18} = \frac{11}{3}$$

Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales en áreas de la ingeniería

La importancia práctica de los sistemas de ecuaciones lineales radica en su capacidad para modelar fenómenos continuos y discretos mediante la simplificación de relaciones físicas, físicas-químicas o económicas en un conjunto de ecuaciones simultáneas. En la práctica profesional de la ingeniería, la solución de un problema real rara vez se limita a una sola variable; por el contrario, involucra redes, estructuras, flujos o equilibrios donde múltiples variables interactúan entre sí.

A continuación, se presentan las aplicaciones más representativas en diversas ramas de la ingeniería.

Análisis de circuitos eléctricos (Ingeniería Eléctrica y Electrónica)

En el análisis de redes eléctricas en corriente directa (CD) o corriente alterna (CA) en estado estacionario, los sistemas de ecuaciones lineales permiten calcular las **corrientes de malla** o los **voltajes de nodo**. Estos modelos se fundamentan en las **Leyes de Kirchhoff**:

1. **Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK):** La suma algebraica de las corrientes que entran a un nodo es igual a cero ($\sum I = 0$).
2. **Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK):** La suma algebraica de las caídas y elevaciones de potencial en una malla cerrada es igual a cero ($\sum V = 0$).

Al combinar estas leyes con la **Ley de Ohm** ($V = I \cdot R$), se obtiene un sistema lineal $AI = V$

Análisis de estructuras y armaduras (Ingeniería Civil y Mecánica)

En ingeniería civil y mecánica, el diseño de puentes, edificios y cerchas mecánicas requiere determinar las fuerzas internas en cada barra o miembro estructural para garantizar que la estructura no falle ni se deforme excesivamente.

Para que una estructura esté en equilibrio estático, debe cumplir con las condiciones fundamentales de la mecánica vectorial para cada nodo k :

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

Al aplicar el Método de los Nodos a una armadura con j nodos y m barras cargadas, se genera un sistema de $2j$ o $3j$ ecuaciones lineales simultáneas cuya forma matricial es:

$$KF = P$$

- K es la matriz de geometría o dirección (compuesta por senos y cosenos de los ángulos de inclinación de los miembros).
- F es el vector columna de fuerzas internas desconocidas en las barras ($F_1, F_2, \dots, F_m$) y reacciones en los apoyos.
- P es el vector de cargas externas aplicadas sobre la estructura.

Balances de materia y energía (Ingeniería Química y de Procesos)

En plantas industriales de transformación química, los procesos operan frecuentemente en estado estacionario (donde las variables del sistema no cambian con el tiempo). El principio de conservación de la materia establece que:

$$\text{Entrada} + \text{Generación} = \text{Salida} + \text{Consumo}$$

Para una unidad de proceso (como columnas de destilación, reactores o mezcladores) que involucra n componentes químicos y m corrientes de flujo, se formula un sistema lineal planteando un balance por cada componente i :

$$\sum_{j=1}^m c_{ij} Q_j = S_i$$

donde Q_j representa el flujo volumétrico o másico de la corriente j , c_{ij} es la concentración del componente i en la corriente j , y S_i representa la alimentación nula o los términos independientes de salida. Resolver este sistema permite dimensionar tuberías, tanques y equipos de separación.

Modelo de Insumo-Producto de Leontief (Ingeniería Industrial y Economía)

Desarrollado por el Premio Nobel Wassily Leontief, este modelo se utiliza en la ingeniería industrial y de sistemas para analizar la interdependencia entre diferentes sectores productivos o departamentos de una organización.

Si una economía u organización consta de n sectores interactuantes, la producción total de un sector x_i debe satisfacer tanto la demanda intermedia de otros sectores como la demanda final externa d_i :

$$x = Cx + d$$

Reorganizando la expresión matricial:

$$(I - C)x = d$$

donde:

- x es el vector de producción total de cada sector.
- C es la matriz de coeficientes tecno-económicos o de consumo interdepartamental.
- $(I - C)$ es la matriz de Leontief.
- d es el vector de demanda final.

Si la matriz $(I - C)$ es invertible, el nivel de producción necesario para satisfacer una demanda prevista se calcula mediante:

$$x = (I - C)^{-1}d$$

CONCLUSIONES

1. **Fundamentación teórica e interconexión matemática:** Los sistemas de ecuaciones lineales constituyen uno de los pilares más sólidos del álgebra lineal. Su estudio no solo permite comprender relaciones algebraicas fundamentales, sino que sienta las bases para el aprendizaje de conceptos más avanzados como la teoría de espacios vectoriales, el cálculo matricial, las transformaciones lineales y el análisis numérico.
2. **Correspondencia entre la geometría y el álgebra:** La interpretación geométrica en espacios bidimensionales ($\mathbb{R}^2$) y tridimensionales ($\mathbb{R}^3$) proporciona un puente claro para entender la naturaleza intrínseca de los sistemas de ecuaciones. Comprender que una solución representa la intersección puntual, lineal o planar entre conjuntos geométricos facilita la

caracterización de los sistemas en compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles según el número de soluciones.

3. **Complementariedad y eficiencia de los métodos de solución:** Cada algoritmo de solución estudiado posee ventajas y límites bien definidos:
 - Los métodos algebraico-matriciales como Gauss y Gauss-Jordan representan las herramientas más robustas y eficientes desde el punto de vista computacional para abordar sistemas de cualquier dimensión ($m \times n$).
 - El método de la matriz inversa y la regla de Cramer ofrecen soluciones analíticas explícitas y conceptualmente valiosas para sistemas cuadrados no singulares, aunque su aplicación práctica se restringe a sistemas de menor escala debido a su mayor costo computacional.
4. **Trascendencia en la modelación de la ingeniería:** Los sistemas de ecuaciones lineales son indispensables para la práctica profesional y la investigación aplicada en diversas disciplinas. Desde el análisis de circuitos eléctricos y el cálculo estático de armaduras, hasta el modelado de plantas de proceso y la planificación industrial, la capacidad de traducir problemas del mundo real a un modelo $Ax = B$ permite predecir el comportamiento de sistemas complejos y tomar decisiones de diseño e ingeniería precisas y fundamentadas.

REFERENCIAS

- Del Valle Sotelo, J. C. (2011). Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias. McGraw-Hill / Interamericana Editores.
- Grossman, S. I. y Flores Godoy, J. J. (2012). Álgebra lineal (7.^a ed.). McGraw-Hill.
- Kolman, B. y Hill, D. R. (2006). Álgebra lineal (8.^a ed.). Pearson Educación.
- Larson, R. y Falvo, D. (2015). Fundamentos de álgebra lineal (7.^a ed.). Cengage Learning.
- CONAMAT (Colegio Nacional de Matemáticas). (2009). Matemáticas simplificadas (2.^a ed.). Pearson Educación.
- Poole, D. (2011). Álgebra lineal: Una introducción moderna (3.^a ed.). Cengage Learning.



ESPACIOS VECTORIALES

García Rueda, Ana Karen

PA TecNM / Instituto Tecnológico de Boca del Río
ana.gr@bdelrio.tecnm.mx

Serrano Chávez, Martha Sarai

TD TecNM/ Instituto Tecnológico de Boca del Río
marthaserrano@bdelrio.tecnm.mx

INTRODUCCIÓN

El estudio de conjuntos $\mathbb{R}^2$ (vectores en el plano) y $\mathbb{R}^3$ (vectores en el espacio) permite identificar reglas algebraicas esenciales, donde la adición vectorial y la multiplicación por un escalar obedecen a las leyes conmutativas, asociativas y distributivas rígidas. No obstante, la importancia del álgebra lineal trasciende la resolución de ecuaciones y la representación gráfica en dimensiones bajas; su aporte fundamental consiste en extender estas propiedades operativas a sistemas de diferente naturaleza. Al definir la estructura de un espacio vectorial bajo una perspectiva axiomática, se logra unificar el comportamiento de múltiples objetos matemáticos dentro de un mismo marco conceptual. Esta transición de lo concreto a lo abstracto resulta metodológicamente eficiente, pues permite deducir propiedades universales aplicables a cualquier espacio vectorial sin necesidad de demostrar de forma aislada los mismos teoremas para cada sistema particular (Stanley I. Grossman S., 2012).

OBJETIVO

El objetivo de esta revisión bibliográfica es examinar la estructura algebraica de los espacios vectoriales desde sus fundamentos axiomáticos, evaluando la dinámica de sus subespacios. De forma complementaria se analiza la geometría abstracta emergente al equipar a un espacio vectorial con una forma bilineal definida positiva o producto interno, lo que formaliza métricas de norma, distancia y ortogonalidad. Finalmente, se aborda el algoritmo ortonormalización de Gram-Schmidt como un procedimiento algebraico clave en la síntesis de bases ortonormales, cuya relevancia computacional resulta determinante en problemas de optimización, análisis funcional y procesamiento digital de señales (Strang, 2017).

MARCO TEÓRICO

Un espacio vectorial $\mathbf{V}$ es un conjunto de objetos, llamados vectores, junto con dos operaciones fundamentales: la adición interna ($+: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$) y la multiplicación por un escalar real ($\cdot : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$). Para que el par $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ constituya un espacio vectorial, debe cumplir de forma estricta con los siguientes diez axiomas (Stanley I. Grossman S., 2012). Los primeros cinco axiomas se utilizan para definir a un grupo abeliano, y los axiomas del seis al diez describen la interacción mediante la operación binaria de un escalar y un vector.

Suma de vectores:

1) Cerradura bajo la suma: Si $x \in \mathbf{V}$ y $y \in \mathbf{V}$, entonces $x + y \in \mathbf{V}$.

2) Ley asociativa: Para todo $x, y, z \in \mathbf{V}$:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

3) Vector cero o idéntico aditivo: Existe un vector $0 \in \mathbf{V}$ tal que para todo $x \in \mathbf{V}$:

$$x + 0 = 0 + x = x$$

4) Inverso aditivo: Si $x \in \mathbf{V}$, existe un vector $-x \in \mathbf{V}$ tal que:

$$x + (-x) = 0$$

5) Ley conmutativa: Si x y y están en $\mathbf{V}$:

$$x + y = y + x$$

Multiplicación por un escalar:

6) Cerradura bajo la multiplicación por un escalar: Si $x \in \mathbf{V}$ y α es un escalar, entonces $\alpha x \in \mathbf{V}$.

7) Primera ley distributiva: Si $x, y \in \mathbf{V}$ y α es un escalar:

$$\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$$

8) Segunda ley distributiva: Si $x \in \mathbf{V}$ y α, β son escalares:

$$(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$$

9) Ley asociativa de la multiplicación por escalares: Si $x \in \mathbf{V}$ y α, β son escalares:

$$\alpha (\beta x) = (\alpha \beta) x$$

10) Identidad escalar: Para cada vector $x \in \mathbf{V}$:

$$1x = x$$

Consideremos el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales:

$$P_2(\mathbb{R}) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

Demostración de las operaciones:

Para dos polinomios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, y un escalar $c \in \mathbb{R}$:

Suma de vectores:

$$(p + q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \in P_2(\mathbb{R})$$

Producto por un escalar:

$$(c \cdot p)(x) = (ca_0) + (ca_1)x + (ca_2)x^2 \in P_2(\mathbb{R})$$

Ambas operaciones satisfacen los 10 axiomas de un espacio vectorial real.

Por otro lado, sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial y $\mathbf{W}$ un subconjunto de $\mathbf{V}$ (Cruz, 2010). Entonces, $\mathbf{W}$ es un subespacio de $\mathbf{V}$ si y solo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

- 1) $0 \in W$
- 2) $x + y \in W$ siempre que $x \in W$ y $y \in W$
- 3) $ax \in W$ siempre que $a \in F$ y $x \in W$.

Ejemplo: La intersección de dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ es un subespacio.

En $\mathbb{R}^3$ sean $H_1 = \{(x, y, z): 3x - y + 2z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): x + y - z = 0\}$. Entonces H_1 y H_2 consisten en vectores que se encuentran sobre planos que pasan por el origen y son subespacios de $\mathbb{R}^3$. $H_1 \cap H_2$ es la intersección de los dos planos que se calculan resolviendo el sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Reduciendo renglones, se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

De este modo, todas las soluciones al sistema homogéneo están dadas por:

$(-\frac{1}{4}z, \frac{5}{4}z, z)$. Haciendo $z = t$, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta L en $\mathbb{R}^3$: $x = -\frac{1}{4}t$, $y = \frac{5}{4}t$, $z = t$. El conjunto de vectores sobre la recta L constituye la intersección $H_1 \cap H_2$, la cual es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Prosiguiendo con el desarrollo conceptual, es necesario abordar que un producto interno sobre un espacio vectorial real $\mathbf{V}$ es una función que asigna a cada par de vectores $u, v \in \mathbf{V}$ un número real $\langle u, v \rangle$, cumpliendo con los siguientes axiomas para todo $u, v, w \in \mathbf{V}$ y $c \in \mathbb{R}$ (Strang, 2017):

- 1) Simetría: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
- 2) Aditividad: $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
- 3) Homogeneidad: $\langle cu, v \rangle = c \langle u, v \rangle$.
- 4) Positividad: $\langle v, v \rangle \geq 0$, y $\langle v, v \rangle = 0 \leftrightarrow v = 0$.

Propiedades geométricas derivadas. El producto interno permite definir los conceptos de norma y ortogonalidad:

Norma: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Ortogonalidad: Dos vectores son ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$.

Desigualdad de Cauchy-Schwartz: $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

A partir de los fundamentos anteriores, se da paso al estudio del algoritmo de Gram-Schmidt. Dado un conjunto linealmente independiente $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, el proceso de Gram-Schmidt permite construir una base ortogonal $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, mediante la siguiente secuencia recursiva:

$$1) u_1 = v_1$$

$$2) u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$3) u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$4) u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j$$

Para transformar esta base ortogonal en una base ortonormal, basta con dividir cada vector entre su norma:

$$q_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, k.$$

CONCLUSIONES

El estudio de los subespacios y sus criterios de cerradura demuestra que la consistencia algebraica se conserva bajo restricciones operativas específica. Asimismo, los conceptos de combinación proporcionan el fundamento para la construcción de bases y la determinación de la dimensión, permitiendo caracterizar la geometría intrínseca de un espacio. En síntesis, la teoría de los espacios vectoriales reafirma su papel como columna vertebral de la matemática aplicada contemporánea, al ofrecer un lenguaje unificado y herramientas rigurosas indispensables para el modelado y la solución de problemas en la ciencia e ingeniería.

REFERENCIAS

- Cruz, E. R. (2010). *Espacios vectoriales, álgebra lineal*. México: Facultad de ciencias UNAM.
- Stanley I. Grossman S., J. J. (2012). *Álgebra lineal* (Séptima ed.). México: McGraw-Hill.
- Strang, G. (2017). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (cuarta ed.). Cengage Learning.



APLICACIONES DEL ÁLGEBRA LINEAL A LAS CIENCIAS QUÍMICO-BIOLÓGICAS

Ortiz Muñoz, Benigno

PTC TecNM / Instituto Tecnológico de Boca del Río
benigno.om@bdelrio.tecnm.mx

Leyva Romero, Melva Jamie

PT TecNM / Instituto Tecnológico de Boca del Río
melvaleyya@bdelrio.tecnm.mx

Vichy Cruz, Aned María

PA TecNM / Instituto Tecnológico de Boca del Río
anedvichy@bdelrio.tecnm.mx

INTRODUCCIÓN

El estudio de las ciencias químico-biológicas se ha abordado tradicionalmente desde un enfoque descriptivo y cualitativo, donde el profesorado se limita a explicar los teoremas matemáticos y aplicaciones genéricas (Ramaswamy et al., 2001). No obstante, la complejidad inherente a los sistemas vivos, los procesos biotecnológicos y las transformaciones químicas exigen un análisis con modelos cuantitativos rigurosos (Galicia et al., 2001). En este escenario, el álgebra lineal se posiciona como el lenguaje matemático estructurado que permite modelar la multidimensionalidad de los sistemas complejos. Las herramientas como el análisis matricial, la teoría de espacios vectoriales, la diagonalización y el cálculo espectral dejan de ser abstracciones teóricas para ser pilares indispensables en las ciencias químico-biológicas. Desde la caracterización de redes metabólicas en procesos fermentativos hasta la evaluación de la dinámica de contaminantes en sistemas acuáticos, el álgebra lineal otorga las herramientas que permiten predecir comportamientos, optimizar recursos y comprender interacciones fisicoquímicas y biológicas que escapan a la intuición observacional tradicional (Juraev et al., 2023).

La integración de las matemáticas en la investigación y la práctica profesional de las ciencias químico-biológicas responde a una necesidad apremiante ante el volumen masivo de datos generados por las tecnologías modernas, tales como la metabolómica, la genómica y la ingeniería de bioprocesos. Con frecuencia, los planes de formación profesional enfrentan una brecha en la aplicación práctica de las herramientas algebraicas, limitando la capacidad del estudiante para traducir problemas experimentales en modelos matemáticos apegados a situaciones reales. La importancia del estudio y aplicación del álgebra lineal en este campo radica en su alto valor predictivo y de optimización; el uso de simulaciones basadas en matrices reduce significativamente los costos experimentales y el tiempo de desarrollo en laboratorios y plantas piloto. Asimismo, el dominio de estas herramientas fortalece el pensamiento crítico e interdisciplinario, permitiendo a los profesionales del área diseñar, controlar y evaluar sistemas industriales y ambientales con un rigor analítico propio de las publicaciones científicas de alto impacto.

Por lo anterior, el objetivo de este trabajo es analizar y modelar sistemas químico-biológicos mediante la aplicación formal de herramientas de álgebra lineal; Para ello, se presentan dos casos de estudio representativos y se plantea la solución matemática, así como su interpretación, proporcionando de esta forma una mayor comprensión de los sistemas químico-biológicos.

MARCO TEÓRICO

El análisis riguroso de los sistemas químico-biológicos mediante álgebra lineal requiere fundamentar los conceptos matriciales y vectoriales que sustentan la modelación cuantitativa de fenómenos dinámicos y multivariables.

Matrices de Proyección y Dinámica Poblacional Estructurada

En ecología microbiana y acuicultura, las poblaciones heterogéneas se dividen en clases discretas de edad o estadios de desarrollo $(1, 2, \dots, n)$. La evolución temporal de la población se modela mediante la ecuación en diferencias finitas:

$$n(t+1) = L n(t)$$

donde $n(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_n(t)]^T$ es el vector de densidad poblacional por estadios en el tiempo t , y L es la matriz de Leslie, estructurada de la forma:

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Donde f_i representa la fecundidad específica por estadio y s_i la probabilidad de supervivencia de la transición del estadio i al $i+1$. El comportamiento asintótico y la tasa intrínseca de crecimiento poblacional a largo plazo están determinados por el valor propio dominante (λ_1) de L de acuerdo con el teorema de Perron-Frobenius.

Diagonalización de Matrices y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales

Los sistemas de reacciones químicas simultáneas, reversibles o en serie se rigen por ecuaciones de velocidad linealizadas o pseudo-lineales. Sea un sistema de m especies químicas cuyas velocidades de cambio se expresan matricialmente como:

$$\frac{dc}{dt} = A c$$

Donde $c(t)$ es el vector de concentraciones y A es la matriz de coeficientes cinéticos (matriz jacobiana del sistema). La solución analítica general se obtiene mediante la diagonalización de A . Si A es diagonalizable, existe una matriz de vectores propios P , tal que:

$$A = P \Lambda P^{-1}$$

Donde Λ es una matriz diagonal que contiene los valores propios λ_i de A . La solución explícita del sistema se formula a través de la matriz exponencial:

$$c(t) = P e^{\Lambda t} P^{-1} c(0)$$

permitiendo predecir con exactitud las concentraciones de especies intermedias en cualquier instante temporal t .

RESULTADOS

Caso 1: Dinámica de Poblaciones y Ecotoxicología en Acuicultura (Matriz de Leslie)

Se evalúa el impacto de la exposición subletal a microplásticos (poliestireno $< 50 \mu\text{m}$) en un sistema de cultivo de *Oreochromis niloticus* (Tilapia del Nilo). La población se divide en tres estadios: alevines (n_1), juveniles (n_2) y reproductores (n_3). En condiciones controladas (sin contaminante) la tasa de crecimiento ($\lambda_0 = 1.41$), y la matriz de transición semanal es L_0 . Ante una concentración de microplásticos de 15mg/L, las tasas de fecundidad y supervivencia decrecen de acuerdo a las siguientes observaciones realizadas:

- Los alevines (estadio 1) aún no han alcanzado la madurez sexual, por lo que su aportación directa de descendencia es nula (0).
- Los juveniles (estadio 2) presentan una fecundidad parcial reducida de 1.2 debido al estrés por contaminantes.
- Los reproductores (estadio 3) son el grupo con mayor tasa de fecundidad (4.5), aunque también se ve mermada en comparación con el escenario óptimo sin estrés.
- 0.4 es la probabilidad de supervivencia y transición de alevines a juveniles ($n_1 \rightarrow n_2$).
- 0.6 es la probabilidad de supervivencia y transición de juveniles a reproductores ($n_2 \rightarrow n_3$).
- 0.2 es la probabilidad de supervivencia y permanencia/retención en la categoría de adultos reproductores de un ciclo a otro ($n_3 \rightarrow n_3$).

Por lo que se genera la matriz L_1 :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.2 & 4.5 \\ 0.4 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Los ceros restantes en la matriz indican transiciones biológicamente imposibles (por ejemplo, un alevín no puede saltar directamente a reproductor sin pasar por la etapa juvenil)

Para calcular la tasa de crecimiento poblacional a largo plazo y determinar si el sistema es viable bajo el estrés ecotoxicológico se debe plantear la ecuación característica para hallar los valores propios resolviendo el determinante:

$$\det(L_1 - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1.2 & 4.5 \\ 0.4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene el polinomio característico:

$$\lambda^3 - 0.2\lambda^2 - 0.48\lambda - 1.08 = 0$$

Al resolver numéricamente el polinomio, se obtiene el valor propio dominante (autovalor real):

$$\lambda_1 \approx 1.154$$

Dado que $\lambda_1 > 1$, la población de *O. niloticus* mantiene una tendencia de crecimiento positivo a pesar del contaminante, aunque la tasa finita de crecimiento disminuyó un 18% en comparación con el escenario control ($\lambda_0 = 1.41$), evidenciando el efecto de la presencia de microplásticos sobre el crecimiento de tilapia mediante un modelo matricial.

Caso 2: Cinética Química en Tratamiento de Efluentes (Diagonalización)

En un reactor de oxidación avanzada para degradar efluentes industriales con compuestos fenólicos, se identifican tres especies clave en una red de reacciones consecutivas y paralelas simplificadas: Fenol inicial (*A*), intermediario tóxico quinónico (*B*) y productos mineralizados inocuos (*C*). Las velocidades de reacción obedecen al siguiente sistema linealizado de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned}\frac{dc_A}{dt} &= -0.8 c_A \\ \frac{dc_B}{dt} &= 0.8 c_A - 0.3 c_B \\ \frac{dc_C}{dt} &= 0.3 c_B\end{aligned}$$

Las concentraciones iniciales $c_A(0) = 100$ mg/L, $c_B(0) = 0$ mg/L y $c_C(0) = 0$ mg/L, se requiere

Dado que el producto intermedio es tóxico resulta de importancia conocer su concentración a diferentes tiempos, por ejemplo a las 2.5 horas. Para poder calcular su concentración es necesario expresar el sistema en forma matricial

$$\frac{dc}{dt} = \mathbf{A}c:$$

Donde el vector de concentraciones es $c(t) = \begin{pmatrix} c_A(t) \\ c_B(t) \\ c_C(t) \end{pmatrix}$ y la matriz de coeficientes

cinéticos **A** es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.8 & 0 & 0 \\ 0.8 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

Para desacoplar el sistema, es necesario diagonalizar la matriz A . Al ser una matriz triangular inferior, sus valores propios se encuentran directamente en su diagonal principal:

$$\lambda_1 = -0.8, \quad \lambda_2 = -0.3, \quad \lambda_3 = 0$$

Lo siguiente es calcular los tres vectores: Para el primer vector $\lambda_1 = -0.8$ se sustituye $\lambda_1 = -0.8$ en la expresión $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$:

$$\left[\begin{pmatrix} -0.8 & 0 & 0 \\ 0.8 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix} - (-0.8) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Realizando la resta (sumando 0.8 en la diagonal):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto genera un sistema de ecuaciones lineales:

1. $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$ (Ecuación trivial)
2. $0.8x_1 + 0.5x_2 + 0x_3 = 0$
3. $0x_1 + 0.3x_2 + 0.8x_3 = 0$

Despejando en función de x_1 (haciendo por ejemplo $x_1 = 1$ o normalizando para que coincida con la solución estándar):

- De la ecuación (2): $0.5x_2 = -0.8x_1 \Rightarrow x_2 = -\frac{0.8}{0.5}x_1 = -1.6x_1$
- De la ecuación (3): $0.3x_2 + 0.8x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{0.3}{0.8}x_2 = -\frac{0.3}{0.8}(-1.6x_1) = 0.96x_1$

Si elegimos $x_1 = 1$, obtenemos nuestro primer vector propio (v_1), que corresponde a la primera columna de la matriz P :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.6 \\ 0.96 \end{pmatrix}$$

Para el segundo vector propio ($\lambda_2 = -0.3$)

Sustituimos $\lambda_2 = -0.3$ en $(A - \lambda_2 I)v_2 = 0$:

$$\left[\begin{pmatrix} -0.8 & 0 & 0 \\ 0.8 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix} - (-0.3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene el sistema resultante:

1. $-0.5y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$
2. $0.8y_1 = 0$ (redundante)
3. $0.3y_2 - 0.3y_3 = 0 \Rightarrow y_2 = y_3$

Como $y_1 = 0$ y $y_2 = y_3$, si asignamos el valor 1 a y_2 (entonces $y_3 = 1$), obtenemos el segundo vector propio (v_2), que conforma la segunda columna de $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Nota: Ajustando el signo de cofactores de la matriz adjunta formal para mantener la consistencia algebraica de la inversa, se denota con el signo negativo correspondiente que resulta en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ al operar con la base dual).

Para el cálculo del tercer vector propio para ($\lambda_3 = 0$) se tiene:

$$\left[\begin{pmatrix} -0.8 & 0 & 0 \\ 0.8 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix} - (0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistema resultante:

1. $-0.8z_1 = 0 \Rightarrow z_1 = 0$
2. $0.8z_1 - 0.3z_2 = 0 \Rightarrow 0 - 0.3z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = 0$
3. $0.3z_2 = 0$ (redundante)

Aquí $z_1 = 0$ y $z_2 = 0$, mientras que z_3 queda como una variable libre. Si asignamos $z_3 = 1$, obtenemos el tercer vector propio (v_3), que forma la tercera columna de $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una vez calculados los tres vectores propios de manera independiente, la regla del álgebra lineal dicta que cada vector propio se coloca estrictamente como una columna de izquierda a derecha en el orden de sus respectivos valores propios (v_1 con λ_1 , v_2 con λ_2 , v_3 con λ_3):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.6 & 1 & 0 \\ 0.96 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Posterior a ello, se calcula la Matriz inversa ($\mathbf{P}^{-1}$):

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.6 & 1 & 0 \\ 0.64 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La solución analítica general para un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias lineales de la forma $\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{c}$ se expresa mediante la matriz exponencial:

$$\mathbf{c}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{c}(0)$$

Por definición teórica, si una matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable, se puede descomponer como $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$ (donde $\mathbf{\Lambda}$ es la matriz diagonal con los valores propios). Sustituyendo esto en la serie de la matriz exponencial, se demuestra que:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} e^{\mathbf{\Lambda}t} \mathbf{P}^{-1}$$

Donde $e^{\mathbf{\Lambda}t}$ es una matriz diagonal cuyos elementos son simplemente las exponenciales de los valores propios multiplicados por el tiempo ($e^{\lambda_i t}$):

$$e^{\mathbf{\Lambda}t} = \begin{pmatrix} e^{-0.8t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-0.3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{0t} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo la descomposición en la ecuación de solución e incorporando el vector de condiciones iniciales $\mathbf{c}(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{-0.8t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-0.3t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al realizar el producto de matrices paso a paso:

1. Primero se multiplica $\mathbf{P}^{-1}$ por el vector de condiciones iniciales $\mathbf{c}(0)$.
2. Luego se multiplica ese resultado por la matriz diagonal $e^{\mathbf{\Lambda}t}$ (lo que efectivamente aplica el comportamiento exponencial desacoplado a cada componente).
3. Finalmente, se premultiplica por la matriz de vectores propios $\mathbf{P}$ para retornar al espacio de concentraciones original.

De donde se obtienen las ecuaciones analíticas finales:

- Para la especie A (Reactivo inicial):

$$c_A(t) = 100 e^{-0.8t}$$

- Para la especie B (Intermediario tóxico):

$$c_B(t) = 100 \left(\frac{0.8}{-0.3 - (-0.8)} \right) (e^{-0.8t} - e^{-0.3t})$$
$$c_B(t) = 160(e^{-0.3t} - e^{-0.8t})$$

- Para la especie C (Producto final):

$$c_C(t) = 100 - c_A(t) - c_B(t)$$
$$c_A(t) = 100 e^{-0.8t}$$

Finalmente, se evalúa la concentración del intermediario B para $t = 2.5$ horas:

$$c_B(2.5) = 160(e^{-0.3(2.5)} - e^{-0.8(2.5)}) = 160(e^{-0.75} - e^{-2.0})$$
$$c_B(2.5) = 160(0.4724 - 0.1353) = 160(0.3371) \approx 53.94 \text{ mg/L}$$

El modelo matricial predice que el subproducto tóxico B alcanza una concentración de 53.94 mg/L a las 2.5 horas.

CONCLUSIONES

El uso de la modelación matricial y de espacios vectoriales permiten transformar los sistemas químico-biológicos cualitativos en modelos cuantitativos con alta capacidad predictiva, optimizando el diseño experimental y reduciendo costos operativos. A su vez, las matrices de proyección estructuradas permiten cuantificar con precisión el impacto de los contaminantes emergentes sobre la viabilidad de poblaciones en sistemas de biológicos. Por otro lado, la diagonalización de matrices y el cálculo espectral proporcionan soluciones exactas para predecir concentraciones transitorias de especies intermedias en diferentes procesos de cinética química, tales como la oxidación avanzada y en el tratamiento de efluentes.

El uso del álgebra lineal deja de ser una simple herramienta teórica para convertirse en un recurso práctico fundamental que permite resolver problemas reales, transformando datos complejos en decisiones operativas claras y eficientes.

REFERENCIAS

Galicia, A., Díaz, L., Arrieta, J., Gama, A., y Landa, L. (2001). *Modelación de una cinética química para el aprendizaje de las matemáticas. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25.

Juraev, D. A., Bozorov, M. N. (2023). Algebra and its applications in technical and engineering problems. *Advanced Engineering Days*, 8, 114-116.

Ramaswamy, S., Harris, I., y Tschirner, U. (2001) Student peer teaching: an innovative approach to instruction in science and engineering education. *J. Sci. Educ. Technol.*, 10(2), 165-171.



APLICACIÓN DEL ÁLGEBRA LINEAL

EN LAS CIENCIAS ECONÓMICO-ADMINISTRATIVAS

Villegas Fonseca, Luis Ernesto

PTC TECNM/ Instituto Tecnológico de Boca del Río
luisvillegas@bdelrio.tecnm.mx

Trejo Lorenzana, Layda Cointa

PA TECNM/ Instituto Tecnológico de Boca del Río
laydatrejo@bdelrio.tecnm.mx

INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal es una rama de las matemáticas que estudia conceptos fundamentales como vectores, matrices, espacios vectoriales y sistemas de ecuaciones lineales. Aunque históricamente su desarrollo estuvo ligado a la geometría y la física, en el último siglo se ha consolidado como una herramienta indispensable en las ciencias económico-administrativas. La capacidad del álgebra lineal para manejar y procesar grandes volúmenes de datos mediante estructuras matriciales la convierte en el lenguaje natural para modelar situaciones financieras, optimizar recursos y analizar redes de transporte y cadenas de suministro. Este capítulo explora cómo los principios abstractos de esta disciplina se traducen en soluciones prácticas para el mundo de los negocios.

PROBLEMÁTICA

En el entorno económico y empresarial contemporáneo, las organizaciones operan en mercados globalizados altamente complejos. Un administrador o economista se enfrenta diariamente a problemas que involucran múltiples variables interdependientes: fluctuaciones de costos, disponibilidad limitada de recursos, demandas de mercado cambiantes y complejas redes de distribución. Intentar resolver estas problemáticas mediante aritmética básica o intuición conduce a ineficiencias, sobrecostos y decisiones subóptimas. La imposibilidad de analizar sistémicamente estas múltiples variables sin una estructura matemática formal representa un obstáculo crítico para la competitividad empresarial.

JUSTIFICACIÓN

La comprensión y aplicación del álgebra lineal en las ciencias económico-administrativas es fundamental porque proporciona modelos matemáticos rigurosos para la toma de decisiones. Al traducir un problema de negocios a un modelo matricial o a un sistema de ecuaciones lineales, los profesionales pueden proyectar escenarios, minimizar costos y maximizar utilidades con un alto grado de precisión. Este artículo se justifica en la necesidad de dotar a estudiantes, académicos y profesionales del área de negocios de una visión clara sobre cómo las herramientas del álgebra lineal no son simples abstracciones teóricas, sino instrumentos prácticos para la rentabilidad y el crecimiento organizacional.

OBJETIVO

Demostrar la utilidad práctica del álgebra lineal en las ciencias económico-administrativas mediante la fundamentación teórica de sus modelos y la resolución de un problema aplicado a la asignación óptima de recursos en la producción.

MÉTODO

El presente trabajo adopta un enfoque analítico y descriptivo. En una primera fase, se realiza una revisión documental de los conceptos clave del álgebra lineal aplicados a la economía. En una segunda fase, se utiliza un método cuantitativo deductivo mediante el planteamiento y resolución de un modelo matemático (sistema de ecuaciones lineales) aplicado a un caso práctico de producción corporativa, evidenciando paso a paso la obtención de resultados.

MARCO TEÓRICO

Para comprender las aplicaciones económicas del álgebra lineal, es necesario definir ciertos conceptos estructurales:

- **Función:** es la relación que existe entre 2 conjuntos, con la condición de que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto; el primer conjunto recibe el nombre de dominio y el segundo el de contradominio. (Bahena, 2018, p. 187).
- **Concepto de inequación** ¿ Los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ se utilizan para comparar expresiones algebraicas que no son iguales, éstas se nombran como desigualdades o inequaciones, Los valores que hacen verdadera 1a inequación se llama conjunto solución. La expresión $a < b$, se lee a es menor que b, $a > b$, se lee a es mayor que b, $a \leq b$, se lee a es menor o igual que b y, por último, $a \geq b$, se lee a es mayor o igual que b. (Bahena, 2018, p.291).
- **Matrices:** Son arreglos bidimensionales de números que permiten organizar datos complejos. En administración, una matriz puede representar los costos de producción, los requerimientos de insumos o los flujos financieros entre distintos departamentos, Proceso de reducción De Gauss El proceso de reducción de Gauss es un sencillo algoritmo para obtener sistemas equivalentes, de forma que el último de ellos se sabe por simple inspección si es o no libre. (Gregori, 2017, p. 80).
- **Sistemas de ecuaciones lineales:** Son conjuntos de ecuaciones de primer grado que comparten las mismas variables. En economía, se utilizan para encontrar puntos de equilibrio en el mercado, donde la oferta iguala a la

demanda, o para calcular la asignación de recursos limitados, en Métodos cuantitativos, se utiliza en Programación

- **Lineal (PL) La programación lineal (LP, también conocida como optimización lineal)** es el campo de la programación matemática dedicado a maximizar o minimizar (optimizar) una función lineal, denominada función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones expresadas mediante un sistema de ecuaciones o inecuaciones también lineales. El método tradicionalmente usado para resolver problemas de programación lineal es el Método Simplex.

La programación lineal puede ser aplicada para los problemas de decisión que tienen las siguientes características: 1. Variables de decisión: es necesario determinar los valores numéricos de dos o más variables; las variables de decisión son factores bajo el control de quien toma las decisiones, y si se modifican, dan como resultado soluciones diferentes entre si 2. Metas: la meta es encontrar los valores que conforman la mejor decisión, esto es, aquellos que maximizan o minimizan la función objetivo. 3. La función objetivo: la función objetivo o criterio es una ecuación matemática que mide los resultados de cualquier alternativa que se proponga. Debe ser lineal. 4. Restricciones: la programación lineal se aplica en ambientes donde los recursos disponibles son limitados, Esta característica a su vez restringe los valores que pueden ser seleccionados para las variables de decisión. Estas limitaciones se expresan como ecuaciones lineales. (Amaya Amaya, J., 2010; p 53).

- **Modelo Insumo-Producto de Leontief:** Desarrollado por el Premio Nobel Wassily Leontief, es quizá la aplicación más famosa del álgebra lineal en la economía macroeconómica. Utiliza matrices para representar cómo la producción de un sector de la economía se convierte en el insumo de otro, permitiendo calcular la producción total necesaria para satisfacer una demanda final.

Matriz de insumo-producto (MIP) es un esquema contable donde se describe el flujo de los bienes y servicios entre los diferentes agentes que participan de diferente manera en la actividad económica, ya sea como productores de bienes y servicios o como consumidores de los mismos. En ella se concentran tanto los principales agregados que caracterizan una economía como la composición sectorial de los mismos. La base del análisis radica en la denominada matriz de transacciones interindustriales, misma que de manera esquemática presentamos a continuación como parte de la matriz de transacciones. (Fuentes, 2002, p.21).

Muchos problemas gerenciales surgen en torno a factores cuantitativos tales como cantidades de producción, ingresos, costos y cantidades disponibles de recursos necesarios, etcétera. Cuando estos factores cuantitativos se incorporan a un modelo matemático y luego se aplican procedimientos matemáticos para resolver el modelo,

la ciencia administrativa proporciona una manera especialmente poderosa de analizar dichos problemas administrativos. Aunque a la ciencia administrativa le preocupa el manejo práctico de las organizaciones, lo que incluye tomar en cuenta factores cualitativos relevantes, su contribución especial reside en esta habilidad única de manejar los factores cuantitativos. (Hillier, 2008, p. 5)

CONCLUSIONES

Para demostrar la utilidad del álgebra lineal, plantearemos un problema clásico de asignación de recursos en una empresa de manufactura, resuelto a través de un sistema de ecuaciones lineales y matrices.

Planteamiento del problema

Una startup ensambla tres tipos productos de micromovilidad: E-scooter, E-unicycles y Hoverboards

El departamento de producción ha determinado los siguientes requerimientos de materia prima para ensamblar una sola unidad de cada producto:

- E – scooter requiere 1 celda de ión de Litio, 3 onzas de cobre y 2 onzas de aluminio
- E - unicycles requiere 3 celda de ión de Litio, 2 onzas de cobre y 2 onzas de aluminio
- Hoverboards requiere 2 celda de ión de Litio, 2 onzas de cobre y 4 onzas de aluminio

Actualmente cuenta con un inventario limitado de estos insumos necesarios para su fabricación, 130 celdas de Ión de Litio, 110 onzas de cobre y 150 onzas de aluminio. Considerando que la contribución a las utilidades son de \$10,000.00 por cada E-scooter, \$9,000.00 por E-unicycles y \$12,000.00 de cada Hoverboards, se puede plantear un modelo de programación lineal, que maximice las utilidades totales.

Modelo matemático

Primero se define las variables de decisión

X_1 = Unidades de E-scooter a producir

X_2 = Unidades de E-unicycles a producir

X_3 = Unidades de Hoverboards a producir

Se define la función objetivo:

Maximizar $Z = 10000 X_1 + 9000X_2 + 12000X_3$

Podemos plantear las restricciones (limitantes) como un sistema de inecuaciones lineales, donde cada ecuación representa una materia prima:

$$\begin{aligned} X_1 + 3 X_2 + 2 X_3 &\leq 130 && \text{(celdas de lón de Litio)} \\ 3 X_1 + 2 X_2 + 2 X_3 &\leq 110 && \text{(onzas de cobre)} \\ 2 X_1 + 2 X_2 + 4 X_3 &\leq 150 && \text{(onzas de aluminio)} \end{aligned}$$

Se plantea el modelo en formato estandar, presentando las inecuaciones como igualdades añadiendo una variable no negativa, llamada superflua.

Base	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Solución
Z	1	-10000	-9000	-12000	0	0	0	0
S_1	0	1	3	2	1	0	0	130
S_2	0	3	2	2	0	1	0	110
S_3	0	2	2	4	0	0	1	150

La solución óptima se encuentra mediante el método simplex; procedimiento iterativo que permite tender progresivamente hacia la solución óptima. Es un procedimiento sistemático y eficiente para encontrar y probar soluciones situadas en los vértices de optimalidad (Proceso de reducción De Gauss).

Base	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Solución
Z	1	0	0	0	500	2000	1750	547500
X_1	0	1	0	0	-0.3	0.5	0.1	3.8
X_2	0	0	1	0	0.5	0	-0.25	27.5
X_3	0	0	0	1	-0.1	-0.3	0.4	21.9

Siendo mezcla de producción óptima, utilizando los recursos disponibles para maximizar utilidades totales (en numeros enteros):

- 4 unidades de E-scooter a producir
- 27 unidades de E-unicycles a producir
- 22 unidades de Hoverboards a producir

Para obtener una utilidad total (Z) de \$ 547,000.00

Cualquier otra mezcla de producción dará una utilidad menos o una insuficiencia en los recursos disponibles.

El álgebra es una disciplina que intenta ayudar en la toma de decisiones gerencial mediante la aplicación de un enfoque científico a los problemas gerenciales que incorporan factores cuantitativos. Un estudio importante de la materia implica la conducción de una investigación sistemática que incluya una cuidadosa recopilación de información, el desarrollo y la prueba de hipótesis acerca del problema, y la aplicación de lógica sólida en el análisis siguiente. Una parte fundamental de un estudio típico de ciencia administrativa es la incorporación de factores cuantitativos a un modelo matemático y luego la aplicación de procedimientos matemáticos para resolver el modelo. Un modelo así utiliza variables de decisión para representar las decisiones cuantificables a tomar. Una función objetivo expresa la medida adecuada de desempeño en términos de estas variables de decisión. Las restricciones del modelo expresan las limitaciones a los valores que se pueden asignar a estas variables de decisión. Los parámetros del modelo son las constantes que aparecen en la función objetivo y las restricciones. La ciencia administrativa ha tenido un impacto impresionante en el aumento de la eficiencia de numerosas organizaciones en todo el mundo.

REFERENCIAS

- Lay, D. C. (2016). *Álgebra lineal y sus aplicaciones (5a ed.)*. Pearson Educación.
- Leontief, W. W. (1986). *Input-Output Economics (2nd ed.)*. Oxford University Press.
- Amaya Amaya, J. (2010). *Toma de decisiones gerenciales: métodos cuantitativos para la administración (2a. Ed.)*. Bogotá, Colombia: Ecoe Ediciones.
- Bahena Román, H. y. (2018). *Álgebra*. Ciudad de México, Mexico: Grupo Editorial Patria.
- Fuentes Flores, N. A. (2002). *Matrices de insumo-producto de los estados fronterizos del norte de México*. México D.F, Mexico: Plaza y Valdés (México).
- Gregori Gregori, V. R. (2017). *Álgebra matricial*. Valencia, Spain: Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia.
- Grossman, S. I. (2012). *Álgebra lineal (7a ed.)*. McGraw-Hill Interamericana.
- Hillier, F. H. (2008). *Métodos Cuantitativos para la Administración 3ª edición*. McGraw-Hill Interamericana.
- Sydsaeter, K. H. (2012). *Matemáticas para el análisis económico*. Pearson Educación.



ISBN: 978-607-5893-99-0



Sello editorial: Red Iberoamericana de Academias de Investigación,
A.C. (978-607-5893)

Primera Edición, Xalapa, Veracruz, México.

No. de ejemplares: 2

Presentación en medio electrónico digital

Formato PDF 6 MB

Fecha de aparición 24/09/2026

ISBN 978-607-5893-99-0