

# FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

LUIS ALEJANDRO TORRES MONREAL  
ISIDRO AMARO RODRÍGUEZ

ISBN: 978-607-5893-48-8



9 786075 893488



# FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

LUIS ALEJANDRO TORRES MONREAL  
ISIDRO AMARO RODRÍGUEZ

©RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C. 2025



EDITA: RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C.  
DUBLÍN 34, FRACCIONAMIENTO MONTE MAGNO  
C.P. 91190. XALAPA, VERACRUZ, MÉXICO.  
CEL 2282386072  
[www.redibai.org](http://www.redibai.org)  
[redibai@hotmail.com](mailto:redibai@hotmail.com)

ISBN: 978-607-5893-48-8



Sello editorial: Red Iberoamericana de Academias de Investigación, A.C.  
(978-607-5893)  
Primera Edición, Xalapa, Veracruz, México.  
No. de ejemplares: 2  
Presentación en medio electrónico digital  
Formato PDF 6 MB  
Fecha de aparición 20/11/2025  
ISBN 978-607-5893-48-8

## DICTAMEN EDITORIAL

La presente obra fue arbitrada y dictaminada en dos procesos; el primero, fue realizado por el **COMITÉ EDITORIAL RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C.** con sede en México; que sometió a los capítulos incluidos en la obra a un proceso de dictaminación a doble ciego para constatar de forma exhaustiva la temática, pertinencia y calidad de los textos en relación a los fines y criterios académicos de la misma, cumpliendo así con la primera etapa del proceso editorial. El segundo proceso de dictaminación estuvo a cargo del **COMITÉ CIENTÍFICO RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C.**; donde se seleccionaron expertos en el tema para la evaluación de los capítulos de la obra y se procedió con el sistema de dictaminación a doble ciego. Cabe señalar que previo al envío a los dictaminadores, todo trabajo fue sometido a una prueba de detección de plagio. Una vez concluido el arbitraje de forma ética y responsable y por acuerdo del Comité Editorial y Científico de la Red Iberoamericana de Academias de Investigación A.C. (REDIBAI), se dictamina que la obra **“FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS”** cumple con la relevancia y originalidad temática, la contribución teórica y aportación científica, rigurosidad y calidad metodológica, actualidad de las fuentes que emplea, redacción, ortografía y calidad expositiva.

Dr. Daniel Armando Olivera Gómez

Director Editorial

Sello Editorial: Red Iberoamericana de Academias de Investigación, A.C.

(978-607-5893)

Dublín 34, Residencial Monte Magno

C.P. 91190. Xalapa, Veracruz, México.

Cel 2282386072

## CERTIFICACIÓN EDITORIAL

**RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C. (REDIBAI)** con sello editorial **No. 978-607-5893** otorgado por la Agencia Mexicana de ISBN, hace constar que el libro **“FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS”** registrado con el **ISBN 978-607-5893-48-8** fue publicado por nuestro sello editorial con fecha de aparición del 20 de noviembre de 2025 cumpliendo con todos los requisitos de calidad científica y normalización que exige nuestra política editorial.

Fue evaluado por pares académicos externos y aprobado por nuestro Comité Editorial y Científico.

Todos los soportes concernientes a los procesos editoriales y de evaluación se encuentran bajo el poder Editorial de **RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C. (REDIBAI)**, los cuales están a disposición de la comunidad académica interna y externa en el momento que se requieran.

La normativa editorial y repositorio se encuentran disponibles en la página **<http://www.redibai-myd.org>**

Doy fe.

Dr. Daniel Armando Olivera Gómez

Director Editorial

Sello Editorial: Red Iberoamericana de Academias de Investigación, A.C.  
(978-607-5893)

Dublín 34, Residencial Monte Magno

C.P. 91190. Xalapa, Veracruz, México.

Cel 2282386072



---

---

LUIS ALEJANDRO TORRES MONREAL  
ISIDRO AMARO RODRÍGUEZ

---

---

“El olvido de las matemáticas perjudica a todo el conocimiento, ya que el que  
las ignora, no puede conocer las otras ciencias, ni las cosas de este mundo”

Roger Bacon  
Filósofo y Científico Inglés  
(1214-1294)

---

---

---

---

# INTRODUCCIÓN

---

---

La inteligencia humana es la capacidad del hombre de entenderse a sí mismo y a su entorno; la facultad de definir lo que le rodea a través de su experiencia y percepción; de modificar el medio en el que se desenvuelve según sus necesidades o capricho. La inteligencia ha dotado al ser humano de una curiosidad inmensa que sólo es satisfecha a través del conocimiento y la comprensión de cada fenómeno con el cual tiene contacto. Para esto ha aprendido a valerse de una serie de procesos y herramientas que le han ayudado a alcanzar en gran medida sus metas cognitivas. La acumulación de experiencia y el uso del razonamiento le han permitido al hombre el poder darle explicación a un gran número de hechos que, si no representan una verdad absoluta, si al menos conforman el saber que ha llevado al hombre hasta donde se encuentra en este momento. Desarrollar e integrar conocimiento recopilado a lo largo de su propia historia, así como una habilidad innata en la generación de nuevo conocimiento a través de raciocinio le han permitido al hombre desarrollarse científica y culturalmente, así como alcanzar un dominio sobre el medio en el que se desenvuelve que ningún otro animal sobre la tierra ha alcanzado. El razonamiento es una herramienta con la cual podemos inferir conocimiento a través del uso de la lógica, la cual representa la capacidad humana para poder interpretar las formas naturales de los eventos que conoce e interpreta; es el orden y sentido del pensar humano general. Por ende, es importante que sepamos hacer buen uso de esta formidable herramienta para el entendimiento y la comprensión de los hechos que nos rodean, así como adquirir las habilidades que nos permitan alcanzar un razonamiento sistemático para la comprensión y solución de problemas de orden general. Por este motivo se pone en manos de los estudiantes este cuadernillo con el afán de poderlo ayudar en esta interesante y fructífera tarea humana.

# CONTENIDO

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| INTRODUCCIÓN .....                                 | 2  |
| LÓGICA .....                                       | 5  |
| LÓGICA ARISTOTÉLICA.....                           | 6  |
| LENGUAJE FORMAL .....                              | 13 |
| CONSECUENCIA Y VALIDEZ LÓGICAS .....               | 16 |
| MATEMÁTICAS.....                                   | 19 |
| ARITMÉTICA .....                                   | 20 |
| GEOMETRÍA .....                                    | 21 |
| TRIGONOMETRÍA.....                                 | 23 |
| ÁLGEBRA.....                                       | 25 |
| CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS.....              | 25 |
| NOMENCLATURA ALGEBRAICA .....                      | 25 |
| CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS ..... | 27 |
| CLASES DE POLINOMIOS.....                          | 28 |
| TÉRMINOS SEMEJANTES .....                          | 30 |
| REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES.....              | 30 |
| VALOR NUMÉRICO .....                               | 31 |
| NOTACIÓN ALGEBRAICA .....                          | 32 |
| SUMA DE MONOMIOS.....                              | 33 |
| SUMA DE POLINOMIOS.....                            | 34 |
| RESTA DE MONOMIOS .....                            | 35 |
| RESTA DE POLINOMIOS .....                          | 36 |
| SIGNOS DE AGRUPACIÓN .....                         | 37 |
| MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS .....                   | 38 |
| MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS POR MONOMIOS .....    | 39 |
| MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS POR POLINOMIOS .....  | 40 |
| DIVISIÓN DE MONOMIOS.....                          | 40 |
| DIVISIÓN DE POLINOMIOS POR MONOMIOS.....           | 41 |
| DIVISIÓN DE DOS POLINOMIOS.....                    | 42 |
| DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL .....                     | 43 |
| SIMPLIFICACIÓN Y REDUCCIÓN DE FRACCIONES .....     | 44 |
| SUMA DE FRACCIONES.....                            | 44 |
| RESTA DE FRACCIONES .....                          | 45 |
| SUMA Y RESTA COMBINADA DE FRACCIONES.....          | 46 |
| DIVISIÓN DE FRACCIONES.....                        | 47 |
| MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN COMBINADAS.....          | 48 |
| SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES .....                 | 49 |

|                                                                                        |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>FÓRMULAS .....</b>                                                                  | <b>51</b> |
| <b>POTENCIA DE UN MONOMIO .....</b>                                                    | <b>54</b> |
| <b>PRODUCTOS NOTABLES. ....</b>                                                        | <b>55</b> |
| <b>CUADRADO DE UN BINOMIO.....</b>                                                     | <b>55</b> |
| <b>CUBO DE UN BINOMIO.....</b>                                                         | <b>56</b> |
| <b>CUADRADO DE UN POLINOMIO .....</b>                                                  | <b>57</b> |
| <b>BINOMIO DE NEWTON.....</b>                                                          | <b>58</b> |
| <b>CONJUNTOS.....</b>                                                                  | <b>60</b> |
| <b>ÁLGEBRA MATRICIAL.....</b>                                                          | <b>66</b> |
| <b>CÁLCULO .....</b>                                                                   | <b>75</b> |
| <b>FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS.....</b>                                                   | <b>75</b> |
| <b>CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES.....</b>                                             | <b>77</b> |
| <b>OPERACIONES CON FUNCIONES .....</b>                                                 | <b>77</b> |
| <b>LÍMITES Y CONTINUIDAD .....</b>                                                     | <b>79</b> |
| <b>METODOLOGÍA PARA DERIVAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS MEDIANTE<br/>INCREMENTOS .....</b> | <b>83</b> |
| <b>DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES MEDIANTE REGLAS PRÁCTICAS .....</b>                     | <b>84</b> |
| <b>INTEGRALES Y MÉTODOS DE INTEGRACIÓN .....</b>                                       | <b>87</b> |
| <b>EJERCICIOS PARA CALCULADORA .....</b>                                               | <b>90</b> |



---

---

# Lógica

---

---

## LÓGICA ARISTOTÉLICA

La lógica aristotélica representa el inicio del estudio de la lógica clásica, la cual tiene como una de sus características más importantes, el centrar su estudio en el lenguaje natural. Las sentencias o enunciados forman parte importante de su campo de estudio, así como el juicio sobre ellos y el razonamiento. Los silogismos son una de las herramientas más importantes con las que cuenta la lógica aristotélica.

### SUJETOS Y PREDICADOS

Al estudiar la lógica aristotélica, se distingue una estructura llamada concepto, el cual representa el entendimiento que tenemos de un objeto. Dos conceptos pueden ser relacionados formando un juicio. Los juicios son negativos o afirmativos dependiendo de la relación que exista entre ellos, es decir, si la relación entre ellos es afirmativa o no. Los juicios también pueden ser catalogados como universales o particulares dependiendo del alcance que tenga al generalizar o no en su sentencia; es decir, si afecta a todos los casos o instancias a los que hace referencia (universal), o si solo afecta a uno o algunos de esos casos (particular). Al concepto con respecto al que se afirma o niega algo, se le conoce como sujeto. Al concepto que es negado o afirmado con respecto al sujeto se le conoce como predicado. De esta manera, si se tiene el concepto “José” y el concepto “inteligente” y se relacionan en el enunciado “José es inteligente”, entonces se podrá formar un juicio al respecto; en el cual, “José” es el sujeto e “inteligente” es el predicado. En este caso ambos conceptos están relacionados por el verbo “ser”. Por lo general se representa al sujeto con “S” y al predicado con “P”, de tal manera que en el ejemplo anterior  $S = \text{José}$  y  $P = \text{inteligente}$ .

**Ejercicios:** Identifique el sujeto y predicado en los siguientes juicios e indique si son afirmativos o negativos, particulares o universales:

- |                                  |                                         |
|----------------------------------|-----------------------------------------|
| 1. Juan es mayor                 | 9. Pablo es amable                      |
| 2. Las aves son coloridas        | 10. Marco es alegre                     |
| 3. Pedro es grande               | 11. Algunas aves son muy grandes        |
| 4. Ningún reptil es microscópico | 12. Francisco es delgado                |
| 5. María no es latina            | 13. Diana no es fea                     |
| 6. Luís es pequeño               | 14. Algunos invertebrados son acuáticos |
| 7. Ángel no es fuerte            | 15. Susana es floja                     |
| 8. Todos los autos son mecánicos |                                         |

## SILOGISMO

El silogismo es la generación de un juicio, partiendo de otros dos juicios conocidos; se trata de la generación de un juicio verdadero, a partir de otros dos que también lo son. Consta también de tres conceptos, uno de los cuales sirve para encadenar a los otros dos en un nuevo juicio verdadero. De las dos premisas que sirven para generar el nuevo juicio, se le conoce como “premisa mayor” a aquella que sirve como punto de partida de la deducción y “premisa menor” a la menos general. El juicio resultante es conocido como “conclusión”. Dentro de éstas, al concepto que forma parte de la premisa menor y que aparece como sujeto de la conclusión, se le conoce como “término menor”. Al concepto que forma parte del término mayor y que conforma el predicado de la conclusión, se le conoce como “término mayor”. El término medio es el que aparece en las dos premisas, pero no en la conclusión.

Existen cuatro formas de silogismo de acuerdo con el lugar que ocupe el término medio en las premisas

| Forma I                           | Forma II                          | Forma III                         | Forma IV                          |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| M es P<br><u>S es M</u><br>S es P | P es M<br><u>S es M</u><br>S es P | M es P<br><u>M es S</u><br>S es P | P es M<br><u>M es S</u><br>S es P |

Existen una serie de leyes o reglas para validar los silogismos, algunas de ellas son:

- Sólo puede estar compuesto por tres términos.
- En la conclusión los términos se expresan igual que en la premisa; es decir tienen el mismo alcance en tiempo y número.
- El término medio, debe hacer referencia a un caso general en al menos una de las premisas.
- Si las dos premisas son negativas, no puede construirse una conclusión.
- Si una premisa hace referencia a un caso particular o negativo la conclusión será particular o negativa según el caso.
- Si dos premisas hacen referencia a casos particulares, no se puede generar una conclusión.

**Ejercicios:** Verifique si los siguientes silogismos son válidos, en caso afirmativo complételos, e indique cual es la premisa mayor, la menor, el término mayor y el término menor. Indique también, a que tipo de forma de silogismo pertenece:

1. Las sillas son de tablones de madera.  
Algunos tablones de madera son de caoba.
2. Ningún lagarto es mamífero.  
Todo lagarto es un reptil.
3. Algunos latinos son personas alegres.  
Las personas alegres son personas inteligentes.
4. Los gatos no son roedores.  
Los ratones son roedores.
5. Las aves son animales con alas.  
El canario es un ave.
6. Los pecosos son personas muy maltratadas.  
Los Sánchez son pecosos.
7. Ninguna planta es un animal.  
Todos los árboles son plantas.
8. Ningún perro es un árbol.  
Todo árbol es un ser vivo con hojas.
9. Algunos insectos son arácnidos.  
Las arañas son arácnidos.
10. Algunos electrodomésticos son aparatos de entretenimiento.  
Todos los electrodomésticos son muebles.
11. Todos los hombres son criaturas pensantes.  
Algunos mamíferos no son hombres.
12. Todos los perros son caninos.  
Algunos perros son galgos.
13. Ningún pez es un animal con alas.  
Algunos peces son salmones.
14. Algunos animales no son animales marinos.  
Algunos animales son marsupiales.
15. Algunas mujeres son rubias.  
Las rubias son atractivas.

16. Algunos hombres son obesos.  
Los no obesos tienen buena salud.
17. Algún joven es asiático.  
Algún asiático es mal estudiante.
18. Ningún foco es una cosa pequeña.  
Las cosas pequeñas son cosas difíciles de manipular.
19. Ningún civil es un hombre armado.  
Los hombres desarmados son soldados.
20. Algunos cerdos son sucios.  
Ningún gato es sucio.
21. Todos los jóvenes son apreciadores de arte.  
Ningún niño deja de ser joven.
22. Los intelectuales son lectores.  
Algunos ancianos son intelectuales.
23. La mayoría de las orugas serán mariposas.  
Las mariposas son hermosas.
24. Algunas pinturas no son arte.  
El arte es un medio de expresión.
25. Algunas plantas no son comestibles.  
Algunas cosas que saben bien se comen.
26. Todas las rocas son duras.  
Algunas cosas blandas se desmoronan.

## CÁLCULO DE PREDICADOS

La lógica de predicados surgió como una necesidad para representar el conocimiento a través de las relaciones que existen entre diversos objetos, así como cualidades y atributos de estos. Estos objetos pueden ser personas, cosas o conceptos y son conocidos como términos o argumentos. Las relaciones que se crean entre ellos son llamados predicados. Los predicados pueden ser falsos o verdaderos de acuerdo con sus términos, lo cual quiere decir que un predicado verdadero para dos términos puede no serlo para otro. La representación de predicados se hace de la siguiente forma, para decir, “Augusto es un científico” se representa CIENTÍFICO (Augusto) en donde CIENTÍFICO es el predicado y Augusto el término o argumento al cual es relacionado. Puede haber varios términos relacionados por un mismo predicado; por ejemplo: “María y Juana son hermanas” se representaría HERMANAS (María, Juana).

**Ejercicios:** Genere la representación de los siguientes predicados.

1. José es inteligente.
2. Luis tiene una empresa.
3. La silla, la mesa y la vitrina son azules.
4. Alejandra es mamá de María y Gustavo.
5. La suma de 4, 6 y 15.
6. El cursor avanza a la izquierda.
7. El león es un mamífero.
8. La contraseña es 181513.
9. Mario es un candidato.
10. Aprobar el examen.

## PRINCIPIOS DE INFERENCIA

La inferencia, es el proceso a través del cual se obtiene un nuevo conocimiento, a partir de otro u otros previos. Es decir, obtener una sentencia o conclusión lógica verdadera a partir de una o varias premisas. El principal interés de la inferencia recae más en comprobar la validez de las conclusiones que en la conclusión en sí.

Ejemplo:

*Si el alumno saca 100, entonces aprobó la prueba.*

*Si el alumno responde bien todo su examen, entonces saca 100.*

*Por lo tanto, si el responde bien todo su examen, entonces aprobó la prueba.*

*Inferencia deductiva aristotélica*

Existen diferentes tipos de inferencias: inductiva, deductiva y abductiva.

La inferencia inductiva, es aquella en la cual la conclusión nos representa un resultado probable, sustentado en las premisas. Por lo general, parte de premisas particulares, de las que se obtiene una conclusión general.

Ejemplos:

*Premisa: Cuando lleno el frasco pesa más.*

*Conclusión: Los frascos llenos pesan más.*

*Premisa: El alumno ha estado comiendo estos días en clase.*

*Conclusión: El alumno siempre come en clase.*

La inferencia deductiva, es aquella en que la conclusión está totalmente sustentada en sus premisas. Siempre parte de un modelo general, para deducir uno particular.

Ejemplo:

*Premisa: Si es una estrella, entonces está en el cielo.*

*Conclusión: Si Régulus es una estrella entonces, Régulus está en el cielo.*

La inferencia abductiva, es aquella en que la conclusión es un resultado potencial de las premisas, tomando en cuenta el limitado conocimiento con el que se cuenta, suponiendo que cualquier otra conclusión es menos posible debido a la falta de sustento.

Ejemplo:

*Premisa: Las cajas de Ana tienen tapas azules.*

*Conclusión: La caja sobre la mesa tiene tapa azul entonces, la caja sobre la mesa es de Ana.*

Las inferencias deductivas son las más importantes en el estudio científico; existen diversos tipos de estrategias para lograr inferencias deductivas, como lo son:

**Modus Ponens:** Se examina la premisa, si es verdadera se determina que la conclusión también es verdadera.

Ejemplo:

*Premisa: Si el sol está en el cielo, entonces es de día.*

*Conclusión: El sol está en el cielo es verdadero.*

*Entonces, es de día es verdadero.*

$$\begin{array}{c}
 P \rightarrow Q \\
 \underline{\text{Si } P} \\
 \text{Entonces } Q
 \end{array}$$



**Modus Tollens:** Se examina la conclusión y si es falsa se concluye que la premisa también lo es.

Ejemplo:

*Premisa: Si la ropa se sumerge en agua, entonces la ropa se humedece.*

*Conclusión: La ropa se humedece es falso.*

*Entonces, la ropa se sumerge en agua es falso.*

$$P \rightarrow Q$$

$$\underline{\text{Si } \neg Q}$$

$$\text{Entonces } \neg P$$

**Ejercicio:** Analice porque son válidas estas dos estrategias de inferencia deductiva y por qué las estrategias

Si  $\neg P$  entonces  $\neg Q$  y Si  $Q$  entonces  $P$  no son válidas.

**Ejercicios:** Construya inferencias modus ponens y modus tollens con las premisas indicadas e indique que estrategia utilizó.

1. Si la manzana está roja, entonces está madura.
2. Si la fruta está madura se puede comer.
3. Si el sol brilla, entonces no está nublado.
4. Si no está nublado, entonces no llueve.
5. Si terminé la preparatoria, entonces tengo mi certificado de bachillerato.
6. Si tengo mi certificado de bachillerato, puedo estudiar una carrera profesional.
7. Si pasé el proceso de selección, entonces pasé el curso de inducción
8. Si pasé el curso de inducción, entonces soy alumno de la UJED.
9. Si trabajas, entonces ganas dinero.
10. Si ganas dinero, entonces comes.
11. Si tomas agua, entonces no tienes sed.
12. Si no tienes sed, entonces no te deshidratas.
13. Si estudias, entonces apruebas el examen.
14. Si apruebas el examen, entonces pasas la evaluación.
15. Si eres responsable, entonces te ganas el respeto de tus maestros.
16. Si te ganas el respeto de tus maestros, entonces eres un buen alumno.
17. Si eres persistente, entonces trabajas duro.
18. Si trabajas duro, entonces logras tus objetivos.
19. Si eres alcohólico, entonces tienes una enfermedad.
20. Si tienes una enfermedad, entonces requieres asistencia médica.

## LENGUAJE FORMAL

Es necesario expresar en forma precisa la función lógica de cada uno de los operadores mencionados. Con este fin, introduciremos un lenguaje formal, el cual llamaremos LF.

### SÍMBOLOS BÁSICOS

**Parámetros de enunciados:** letras mayúsculas del alfabeto.

**Símbolos lógicos:**  $(, ), \wedge, \rightarrow, \sim, \vee, \leftrightarrow$

### OPERADORES LÓGICOS

Un operador lógico, es un estado de la lógica proposicional que solo puede tomar dos valores, falso y verdadero.

| Nombre                       | Símbolo                                       | Se lee                                 |
|------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------|
| Negación                     | $\neg, \neg, '$                               | No (Not)                               |
| Disyunción Inclusiva (Unión) | $\vee, \cup, +$                               | O (Or)                                 |
| Disyunción Exclusiva         | $\underline{\vee}, \oplus$                    | O (Or)                                 |
| Conjunción (Intersección)    | $\wedge, \cap, *$                             | Y (And)                                |
| Equivalencia Material        | $\leftrightarrow, \Leftrightarrow, \equiv, =$ | Si y sólo si, Entonces y sólo entonces |
| Implicación Material         | $\rightarrow, \Rightarrow, \supset$           | Si; Entonces                           |
| Consecuencia Lógica          | $\therefore$                                  | Como consecuencia                      |
| Cuantificador Universal      | $\forall, \Lambda$                            | Para todos los elementos de            |
| Cuantificador Existencial    | $\exists, \vee$                               | Para al menos un elemento de           |

Hay varios símbolos para una misma operación. Es más común que algunos de ellos se usen en el cálculo de preposiciones o predicados, otros en teoría de conjuntos y otros en el álgebra de Boole. Los símbolos  $+$ ,  $*$  y  $\oplus$ , por lo general se utilizan en álgebra de Boole y pueden ser concebidos de una forma distinta.

Ejemplo:

*Pedro es amigo de todos los amigos de Ana.*

$$\forall x(x(a) \rightarrow x(p))$$

Se lee: *Para todo x, si x es amigo de Ana, entonces x es amigo de Pedro.*

**Ejercicios:** Expresa los siguientes enunciados utilizando lenguaje formal.

1. Si María tiene celos de una amiga de Pablo entonces la amiga de Pablo no es amiga de María.
2. El maestro tiene ganas de comer galletas si estas son de canela.
3. Si el coordinador es de la UJED entonces es un hombre responsable y civilizado
4. La idea de Juan es una mentira o una exageración
5. La computadora es una herramienta útil
6. Si Juana reprueba el examen entonces repetirá curso
7. Mario es un personaje muy popular
8. Si todos los hombres son de Marte entonces todas las mujeres son de Venus
9. Para toda acción hay una reacción
10. Algunos alumnos batallan con matemáticas cuando las matemáticas que ven son cálculo.

## SEMÁNTICA DE SÍMBOLOS LÓGICOS

**Semántica informal:** Usar el lenguaje coloquial para interpretar cada símbolo. Por ejemplo, “ $\wedge$ ” habrá de significar lo mismo que “y”.

**Semántica formal:** Usar tablas de verdad.

## EXPRESIONES BIEN FORMADAS

- Una proposición elemental es una EBF (Expresión bien formada).
- Si  $\phi$  es una EBF, entonces  $\sim\phi$  es una EBF.
- Si  $\gamma$  y  $\phi$  EBF, entonces  $\phi \wedge \gamma$ ,  $\phi \vee \gamma$ ,  $\phi \rightarrow \gamma$  y  $\phi \leftrightarrow \gamma$  son EBF.
- Aplicaciones finitas de las reglas anteriores son EBF.

Ejemplo: *Las siguientes son EBF*

$$(A \wedge B)$$

$$(\sim A \leftrightarrow M) \vee (H \rightarrow R)$$

$$((D \rightarrow B) \wedge H)$$

$$(I \rightarrow \sim C) \rightarrow (\sim A \wedge M)$$

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge H)$$

**Ejercicio:** Elabore 10 EBF

## TABLAS DE VERDAD

Las tablas de verdad muestran los valores y los resultados posibles de las operaciones lógicas.

### NEGACIÓN

| $p$ | $\neg p$ |
|-----|----------|
| F   | V        |
| V   | F        |

### CONJUNCIÓN

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| F   | F   | F            |
| F   | V   | F            |
| V   | F   | F            |
| V   | V   | V            |

### DISYUNCIÓN INCLUSIVA

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| F   | F   | F          |
| F   | V   | V          |
| V   | F   | V          |
| V   | V   | V          |

### DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

| $p$ | $q$ | $p \oplus q$ |
|-----|-----|--------------|
| F   | F   | F            |
| F   | V   | V            |
| V   | F   | V            |
| V   | V   | F            |

**EQUIVALENCIA MATERIAL**

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| F   | F   | V                     |
| F   | V   | F                     |
| V   | F   | F                     |
| V   | V   | V                     |

**IMPLICACIÓN MATERIAL**

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| F   | F   | V                 |
| F   | V   | V                 |
| V   | F   | F                 |
| V   | V   | V                 |
|     |     |                   |

**CONSECUENCIA Y VALIDEZ LÓGICAS**  
**CONSECUENCIA LÓGICA**

Ejemplo:

$$A \rightarrow B$$

$$\sim B$$

$$\therefore \sim A$$

Lo anterior se lee: Si A entonces B. Entonces si no B por consecuencia lógica no A.

**VALIDEZ LÓGICA****POR TABLAS DE VERDAD**

Procedimiento:

1. Agregar una columna para cada variable.
2. Anotar todos los valores posibles de las variables mediante un conteo binario.
3. Calcular el valor de cada uno de los términos de la fórmula, empezando por los interiores y anotarlos en una nueva columna.

Ejemplo:

$$A \equiv (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow \neg q \vee r)$$

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \wedge q$ | $p \wedge q \rightarrow r$ | $\neg q$ | $\neg q \vee r$ | $p \rightarrow \neg q \vee r$ | $A$ |
|-----|-----|-----|--------------|----------------------------|----------|-----------------|-------------------------------|-----|
| F   | F   | F   | F            | V                          | V        | V               | V                             | V   |
| F   | F   | V   | F            | V                          | V        | V               | V                             | V   |
| F   | V   | F   | F            | V                          | F        | F               | V                             | V   |
| F   | V   | V   | F            | V                          | F        | V               | V                             | V   |
| V   | F   | F   | F            | V                          | V        | V               | V                             | V   |
| V   | F   | V   | F            | V                          | V        | V               | V                             | V   |
| V   | V   | F   | V            | F                          | F        | F               | F                             | V   |
| V   | V   | V   | V            | V                          | F        | V               | V                             | V   |

**Ejercicios:** Comprobar la validez lógica de las siguientes equivalencias, mediante el uso de tablas de verdad.

1.  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
2.  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
3.  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
4.  $\neg(p \vee p) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
5.  $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
6.  $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
7.  $(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$
8.  $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
9.  $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$
10.  $(p \wedge p) \leftrightarrow p$
11.  $(p \wedge \neg p) \leftrightarrow F$
12.  $(p \wedge F) \leftrightarrow F$
13.  $(p \wedge V) \leftrightarrow p$
14.  $(p \vee p) \leftrightarrow (q \vee p)$
15.  $(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$
16.  $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
17.  $(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$
18.  $(p \vee p) \leftrightarrow p$
19.  $(p \vee \neg p) \leftrightarrow V$
20.  $(p \vee F) \leftrightarrow p$
21.  $(p \vee V) \leftrightarrow V$
22.  $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$

## EN LENGUAJE COLOQUIAL

Procedimiento:

1. Traducir del lenguaje coloquial a lenguaje formal.
2. Determinar la validez mediante tablas de verdad.
3. Verificar la validez de la sentencia.

Ejemplo:

*Si aumentan los precios y no incrementan los salarios, entonces aumentará la pobreza.*

*Traducción del razonamiento:* $A \equiv$  aumentan los precios $B \equiv$  incrementan los salarios $C \equiv$  aumentará la pobreza*Representación en lenguaje formal:*

$$A \wedge \neg B$$

$$\therefore C$$

$$(A \wedge \neg B) \rightarrow C$$

## Prueba de validez lógica:

| A | B | C | $\neg B$ | $A \wedge \neg B$ | $(A \wedge \neg B) \rightarrow C$ |
|---|---|---|----------|-------------------|-----------------------------------|
| F | F | F | V        | F                 | V                                 |
| F | F | V | V        | F                 | V                                 |
| F | V | F | F        | F                 | V                                 |
| F | V | V | F        | F                 | V                                 |
| V | F | F | V        | V                 | F                                 |
| V | F | V | V        | V                 | V                                 |
| V | V | F | F        | F                 | V                                 |
| V | V | V | F        | F                 | V                                 |

**Ejercicios:** En los siguientes ejercicios, traduzca las oraciones a lenguaje formal y verifique su validez lógica.

1. Para entrar a la UJED, debo aprobar el CENEVAL y el curso propedéutico.
2. Si llueve, se terminarán los problemas de sequía y no habrá dificultades económicas.
3. Sólo acreditaré las materias, si estudio, entrego los trabajos y no faltó a los exámenes.
4. Sólo si distingues bien los acentos o preguntas su lugar de procedencia sabrás si es inglés o estadounidense.
5. Cuando me desvelo y no desayuno, me duermo en clase y no pongo atención.
6. Un partido de fútbol, sólo se gana si se corre mucho y se tiene calidad.
7. Si pago mis impuestos, el Estado tendrá más dinero y realizarán más obras.
8. Para que llueva o granice, es necesario que se den condiciones climáticas adecuadas.
9. Si voto, elijo a mis gobernantes y tengo derecho a opinar.
10. Con un buen gobierno, hay más empleo y no necesito emigrar.

---

---

# Matemáticas

---

---



**ARITMÉTICA**

1. ¿Cuál es el residuo de la siguiente operación:  $2\,432\,108/56.5$ ?
2. Calcule la raíz cuadrada del siguiente número:  $567492.12$  (sin utilizar calculadora, resultado con dos decimales)
3. Sin utilizar calculadora, determine el valor de cada uno de los lados de un cuadrado cuya área es:  $1253.4\text{ cm}^2$
4. ¿Cuál es el residuo de la siguiente operación?  $\sqrt{458981}$
5. Clasifique los siguientes números en racionales e irracionales:  $4/3$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $1$ ,  $5454/0$ ,  $2/6$ ,  $\sqrt{81}$
6. Calcule el área máxima que podría medir un terreno rectangular, si uno de sus lados mide aproximadamente entre  $10.2$  mts y  $9.8$  mts, y el otro lado mide aproximadamente entre  $15.4$  mts y  $16.2$  mts.
7. Redondee las siguientes cantidades a centenas:  $533553$ ,  $601$ ,  $532.42111$ ,  $90986$ ,  $151.9$
8. Calcule el valor de la expresión:  $\frac{(ab)^2}{(a+c+d)^3}$  de acuerdo con el valor de las variables:  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $c = 5$  y  $d = 4.3$
9. Redondee las siguientes cantidades a números enteros, posteriormente encuentre el valor del error absoluto, resultado de realizar esas aproximaciones:  $25432.001$ ,  $2.00$ ,  $524353.324$ ,  $4.587$
10. Calcule el error relativo y el porcentaje de error de las siguientes aproximaciones:  $5.3$ ,  $5.0$ ,  $5.5434$ ,  $5.212$ ; valor exacto:  $5.3543$

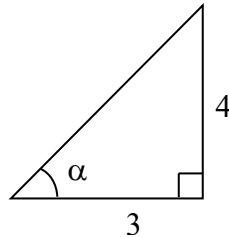
## GEOMETRÍA

- Trace un sistema coordenado rectangular y señale los puntos siguientes:  $(1,3)$ ,  $(-5,5)$ ,  $(0,0)$ ,  $(-2,-4)$ ,  $(5.5,0.5)$ . Además, trace el segmento de recta que une los siguientes puntos:  $(-2,-2)$  con  $(4,5)$ .
- Determine la distancia existente entre los siguientes puntos coordenados:  $(-5,-4)$  y  $(0,3)$ .
- Obtenga el valor de  $x$ , si la distancia entre  $A=(x,-2)$  y  $B=(2,7)$  es  $\sqrt{145}$ .
- Expresar la ecuación  $x = \frac{(5y-12)}{9}$  como una función de la variable independiente  $x$ .
- Expresar la gráfica de la ecuación  $y = x^2 + 2$  en el intervalo  $-2 \leq x \leq 2$ .
- Dada la ecuación  $4x - 3y = 0$ , determine si los puntos:  $(3,4)$ ,  $(-2,1)$  pertenecen o no a la recta que corresponde dicha ecuación.
- Determine las coordenadas del punto de intersección de las ecuaciones:  $5x + 2y = 10$  con  $x + 3y = 4$ .
- Determine la pendiente de la recta:  $2x + 4y = 4$ .
- Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(2,1)$  y  $(3,5)$ .
- Convertir la siguiente ecuación general de la línea recta:  $6x + 7y - 33 = 0$  a su forma común.
- Determine la ecuación de la circunferencia en su forma reducida y general con centro en  $(2,3)$  y que pasa por el punto  $(-3,4)$ .
- Determine la ecuación de la circunferencia en su forma reducida con centro en  $(3,3)$ , tangente a la recta:  $2x + 4y = -8$ .
- Determine las nuevas coordenadas del punto  $(-2,4)$  si el origen del sistema a que está referido pasa por una traslación a  $o' = (1,2)$ .
- Obtener la ecuación de la parábola, en su forma reducida y en su forma general, con los datos siguientes: vértice en  $(1,2)$ , directriz  $x = 3$ .
- Determine las coordenadas de los puntos donde la parábola  $y^2 + 2x - 4 = 0$  y la recta  $x + y = 1$  se intersecan.
- En la ecuación de la elipse  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{81} = 1$ , calcular la distancia focal.
- Obtener la ecuación de la elipse en su forma reducida, la excentricidad y la distancia focal de la curva con centro en el punto  $(-1,3)$ , vértices  $(-1,9)$  y  $(-1,-3)$ , y focos  $(-1,7)$  y  $(-1,-1)$ .

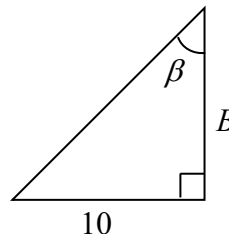
18. Obtener la ecuación de la hipérbola en su forma reducida y general con los datos siguientes: centro  $(-1, -2)$ , vértices  $(-3, -2)$  y  $(1, -2)$ , focos  $(-5, -2)$  y  $(3, 2)$ .
19. Calcula la ecuación polar correspondiente a  $2x + 3y + 5 = 0$
20. Calcula la ecuación rectangular correspondiente a  $r \cos \theta = -6$ .

## TRIGONOMETRÍA

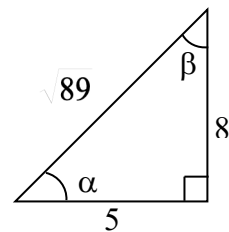
1. Representa matemáticamente el enunciado del Teorema de Pitágoras.
2. Un nadador desea saber la distancia que nadó, al atravesar diagonalmente una alberca olímpica de 50 mts de largo y 25 mts de ancho.
3. Determine el valor de la hipotenusa y del ángulo  $\alpha$  del siguiente triángulo rectángulo.



4. Determine el valor del lado  $B$ , cuando  $\beta = 45^\circ$ .



5. Dado un cierto ángulo, ¿cuál es la función recíproca del coseno?
6. Dado el triángulo de la figura, efectúe las siguientes operaciones:  $\tan \alpha \cot \alpha$ ,  $\sin \alpha \csc \alpha$  y  $\sin \alpha \tan \alpha$ .



7. Un avión despegue y asciende con un ángulo constante de  $33^\circ$  hasta alcanzar una altura de 6,500 mts. ¿Cuál fue la distancia recorrida?
8. La Torre Inclinada de Pisa tiene un ángulo de inclinación respecto al piso de  $70^\circ$  y su altura (medida verticalmente, desde el piso a la punta de la torre) es de 50 mts. ¿Cuál es su longitud (distancia que mediría del piso a la punta si no estuviera inclinada)?
9. La Pirámide de Keops tiene dos ángulos de  $45^\circ$  y su base mide 200 mts. ¿Cuál es su altura?
10. Encuentra la componente horizontal, de un vector de fuerza de magnitud de 37 N que actúa con un ángulo de  $58^\circ$  respecto a la horizontal.

11. Para calcular el ancho de un río, un ingeniero observa desde el punto  $A$  el punto  $B$ , el cual se encuentra del otro lado del río a  $79^\circ$  noroeste. Después de caminar 22 mts, en dirección oeste, el ingeniero se ubica exactamente en la parte sur del punto  $B$ . ¿Cuál es el ancho del río?
12. La Torre Eiffel proyecta una sombra de 65.2 mts de largo cuando el ángulo del sol sobre el horizonte es de  $79^\circ 30' 20''$ . ¿Cuál es la altura de la Torre Eiffel?
13. Desde lo alto de un faro de 53 mts, se observa un barco bajo un ángulo de depresión de  $42^\circ$ . Determine la distancia entre la base del faro y el barco.
14. Se desea construir una rampa para acrobacias en motocicleta. El largo de la rampa es de 20 mts, se desea que se levante a 8 mts. ¿Cuál es el ángulo de inclinación que tendrá la rampa respecto al suelo?
15. Desde el asiento número 100,001 en la parte más alta del Estadio Azteca (30 mts), se observa a Hugo y a Ricardo, que van alineados respecto a dicho asiento. Si los ángulos de depresión son de  $20^\circ$  y  $25^\circ$  ¿a qué distancia se encuentra Hugo de Ricardo?

# ÁLGEBRA

## CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS

Números que expresan cantidades menores que cero son expresados como números negativos. Números que expresan cantidades mayores que cero son expresadas como números positivos.

### Ejercicios

1. Un hombre cobra \$250. Paga una deuda de \$140 y luego hace compras con un valor de \$130. ¿Cuánto tiene?
2. Tenía \$150, cobré \$61 y pagué deudas por \$189. ¿Cuánto tengo?
3. Juan debía 60 euros y recibió 310. Expresar su estado económico.
4. Compro ropa con valor de 559 soles y alimentos por 1278. Si después recibo 2180, ¿Cuál es mi estado económico?
5. Tenía \$20, pagué \$15 que debía, después cobré \$40 y luego hice gastos por \$75. ¿Cuánto tengo?
6. Carlos hace una compra por \$67; después recibe \$72; luego hace otra compra por \$16; finalmente recibe \$2. Expresar su estado económico.
7. Después de caminar 50 m. a la derecha del punto “A” recorro 85 m. en sentido contrario. ¿A qué distancia me hallo ahora de “A”?
8. A las 3 a.m. el termómetro marca  $-8^{\circ}$  y al mediodía  $+5^{\circ}$ . ¿Cuántos grados ha subido la temperatura?
9. Un automóvil recorre 52 m. a la derecha del punto “A” y luego en la misma dirección retrocede 60 m. ¿A qué distancia se haya de “A”?
10. Un auto recorre 200 Km. A la izquierda del punto “B” y luego retrocede a razón de 60 Km. por hora. ¿A qué distancia se halla del punto “B” al cabo de la 1ª, 2ª, 3ª y 4ª hora?

### NOMENCLATURA ALGEBRAICA

**Expresión algebraica.** - Es un conjunto de cantidades numéricas y literales relacionadas entre sí por los signos de las operaciones aritméticas. Las partes de una expresión algebraica separadas por los signos + (más) ó - (menos) se llaman términos de la expresión.

**Término** es entonces una cantidad aislada o separada de otras por el signo + ó -.

**Elementos de un término.** - Son cuatro: el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado.

Ejemplo: En el término  $5x^2y$ , el signo es positivo, suele omitirse en cantidades positivas; el coeficiente es 5; la parte literal la constituyen las letras que hay en el término, en este caso,  $x^2y$ .

**Grado de un término.** - Puede ser de dos clases: absoluto y con relación a una letra.

**Grado absoluto.** - Es la suma de los exponentes de sus factores literales.

Ejemplo: el término  $5a^3b^2c$  es de sexto grado porque la suma de los exponentes de sus factores literales es  $3 + 2 + 1 = 6$ .

**Grado con relación a una letra.** - Es el exponente de dicha letra. Ejemplo: el término  $ax^2$  es de primer grado en relación con “a”, y de segundo grado en relación con “x”.

**Clases de términos:** Enteros, fraccionarios, racionales, irracionales y heterogéneos.

**Término entero.** - Es aquel que no tiene denominador literal. Ejemplos:  $3a$ ,  $6a^3b^3c^3$ ,  $\frac{2a}{4}$

**Término fraccionario.** - Es el que tiene denominador literal. Ejemplos:  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{x}{y}$ ,  $\frac{y}{z}$

**Término racional.** - Es el que no tiene radical. Ejemplos:  $x^2$ ,  $a^3b^3c$ ,  $\frac{4a}{b}$

**Término irracional.** - Es el que tiene radical. Ejemplos:  $\sqrt{2xy}$ ,  $\frac{6a}{\sqrt{b}}$

**Términos homogéneos.** - Son los que tienen el mismo grado absoluto. Ejemplo:  $(4x^3y)$  y  $(6x^2yz)$

**Términos heterogéneos.** - Son los que tienen distinto grado absoluto. Ejemplo:  $(5xyz)$  y  $(3x^2)$

## Ejercicios

1. Mencione que clase de términos son los siguientes, atendiendo al signo, a si tienen o no denominador y a si tienen o no radical:

$$5b^2, -4a^3b, \frac{2a}{3}, -\frac{5b}{6}, \sqrt{a}, -\frac{\sqrt{a}}{6}, -\frac{2a}{\sqrt{9b}}$$

2. Mencione el grado absoluto de los términos siguientes:  
 $8a, -6a^3b, a^3b^3, -5a^3b^3c, -xyz^3$
3. Mencione el grado de los términos siguientes respecto a cada uno de sus factores literales:  
 $8a, -6a^3b, a^3b^3, -5a^3b^3c, -xyz^3$
4. Escribir cuatro términos que sean homogéneos y tres que sean heterogéneos.
5. Escribir tres términos enteros y dos términos fraccionarios.
6. Escribir tres términos positivos, enteros y racionales.
7. Escribir tres términos negativos, fraccionarios e irracionales.
8. Escribir un término de cada uno de los grados absolutos siguientes: de tercer grado, de quinto grado, de undécimo grado y de décimo quinto grado.
9. Escribir un término de dos factores literales que sea de cuarto grado con relación a “x”; además, otro de tres factores literales que sea de séptimo grado con relación a “y”.
10. Escribir un término de cinco factores literales que sea de décimo grado con relación a “z”.

## CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAÍCAS

**Monomio.** - Es una expresión algebraica que consta de un solo término. Ejemplos:  $a, 6a, -7x$

**Polinomio.** - Es una expresión algebraica que consta de más de un término. Ejemplos:  $a + b, a + x - y, x^3 + 2x^2 + x + 7$

**Grado de un polinomio.** - Puede ser absoluto o con relación a una letra.

**Grado absoluto.** - Es el grado de su término de mayor grado. Ejemplo: el polinomio  $6x^3 + x^2 - x$  es de tercer grado absoluto.

**Grado con relación a una letra.** - Es el mayor exponente de dicha letra en el polinomio. Ejemplo:  $(a^3 + 4a^2x^2 - ax)$  es de tercer grado con relación a la literal “a” y de segundo grado con relación a “x”.



## Ejercicios

a) Mencione el grado absoluto de los siguientes polinomios:

1.  $x^3 + x^2 + x$
2.  $5a - 3a^2 + 4a^3 + 8$
3.  $a^2b + a^2b^2 - ab^3 - 5$
4.  $xy + x^2y^2 + x^3y^3$
5.  $x^3 - 6x^2y + 3xy^2 + y^3$

b) Mencione el grado de los siguientes polinomios con relación a cada una de sus letras:

- c)  $x^3 + x^2 + x$
- d)  $5a - 3a^2 + 4a^3 + 8$
- e)  $a^2b + a^2b^2 - ab^3 - 5$
- f)  $xy + x^2y^2 + x^3y^3$
- g)  $x^3 - 6x^2y + 3xy^2 + y^3$

## CLASES DE POLINOMIOS

**Entero.** - Es cuando ninguno de sus términos tiene denominador literal.

Ejemplos:  $x^2 + 5x + 3$ ,  $a^3b + ab^3$

**Fraccionario.** - Es cuando alguno de sus términos tiene letras en el denominador. Ejemplos:  $\frac{5b}{a} + \frac{b}{c} - 8$

**Racional.** - Cuando no contiene radicales. Ejemplo:  $xy^2 + 2y + 1$ ,  $u^3v + uv^3$

**Irracional.** - Cuando contiene radicales. Ejemplos:  $\sqrt{a+b}$ ,  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

**Homogéneo.** - Cuando todos sus términos son del mismo grado absoluto. Ejemplo:  $4a^3 + 5a^2b + 6ab^2 + b^3$

**Heterogéneo.** - Cuando sus términos no son del mismo grado. Ejemplo:  $x + x^2 + x^3$ .

**Completo.** - Con relación a una letra es el que contiene todos los exponentes sucesivos de dicha letra, desde el más alto al más bajo que tenga dicha letra en el polinomio. Ejemplo:  $x^3 + x^2 + x$ .

**Ordenado.** - Con respecto a una letra, es un polinomio en el cual los exponentes de una letra escogida van aumentando o disminuyendo. Ejemplos:  $2a^3 + 5a^2 + 7a$ ,  $x + 4x^2 + 9x^3$

## Ejercicios

- Mencione de que clase son los polinomios siguientes:
  - $a^3 + 2a^2 - 3a$
  - $\frac{a^4}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - a$
  - $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 2c + \sqrt{d}$
  - $4a + \frac{\sqrt{a}}{2} - 6b + 4$
- Escribir un polinomio de tercer grado absoluto, uno de quinto grado absoluto y uno de octavo grado absoluto.
- Escribir un trinomio de segundo grado respecto de  $x$ .
- De los siguientes polinomios escoger dos que sean homogéneos.
  - $3a^2b + a^3b - 5b^3$
  - $a^4 - a^3b + a^2b^2 + ab^3$
  - $x^5 - bx^4 + abx^3 + ab^3x^2$
  - $4a - 5b + 6c^2 - 8d^3 - 6$
  - $y^5 - ay^4 + a^2y^3 - a^3y^2 - a^4y + y^5$
  - $-6a^3b^4 - 5a^6b + 8a^2b^5 - b^7$
- De los siguientes polinomios escoger dos que sean heterogéneos.
  - $3a^2b + a^3b - 5b^3$
  - $a^4 - a^3b + a^2b^2 + ab^3$
  - $x^5 - bx^4 + abx^3 + ab^3x^2$
  - $4a - 5b + 6c^2 - 8d^3 - 6$
  - $y^5 - ay^4 + a^2y^3 - a^3y^2 - a^4y + y^5$
  - $-6a^3b^4 - 5a^6b + 8a^2b^5 - b^7$

6. De los siguientes polinomios diga cuales son completos y respecto de cuales letras.
- $a^4 - a^2 + a - a^3$
  - $5x^4 - 8x^2 + x - 6$
  - $x^4y - x^3y^2 + x^2y^3 - y^4$
  - $m^5 - m^4 + m^3 - m + 5$
  - $y^5 - by^4 + b^2y^3 - b^3y^2 + b^4y$
7. Escribir tres polinomios homogéneos de tercer grado absoluto; cuatro de quinto grado absoluto y dos polinomios completos.
8. Ordenar los siguientes polinomios respecto de cualquier letra en orden descendente.
- $z^4 + 5m^8 - 75a^5$
  - $y^5 - by^4 + b^2y^3 - b^3y^2 + b^4y$
9. Ordenar los siguientes polinomios respecto de cualquier letra en orden ascendente.
- $y^{12} - x^9y^6 + x^{12}y^8 - x^3y^6$
  - $-3m^{15}n^2 + 4m^{12}n^7 - 8m^7n^{25} + 7n^8 + 3m^9n^5 + m^{28}n^7$
10. Escribir un polinomio de quinto grado respecto de “a”; un polinomio de noveno grado respecto de “m”.

## TÉRMINOS SEMEJANTES

Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal y el mismo exponente.

Ejemplos: “2a” y “a”, “-b” y “8b”, “-5a<sup>2</sup>b<sup>3</sup>” y “-8a<sup>2</sup>b<sup>3</sup>”

## REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Es una operación que tiene por objeto convertir en un solo término dos o más términos semejantes.

En la reducción de términos semejantes pueden ocurrir los tres casos siguientes:

1. Reducción de dos o más términos semejantes del mismo signo. Ejemplo:  $3a + 2a = 5a$

2. Reducción de dos términos semejantes de distinto signo. Ejemplo:  $2a - 3a = -a$

3. Reducción de dos o más términos semejantes de signos distintos.

Ejemplo:  $5b - 8b + b - 6b + 21b = 13b$

**Ejercicios**

Reducir:

1.  $x + 2x$
2.  $8b + 9b$
3.  $11a + 9a$
4.  $8c - 6c$
5.  $6c - 8c$
6.  $7b - 7b$
7.  $9a - 3a + 5a$
8.  $-8x + 9x - x$
9.  $12mn - 23mn - 5mn$
10.  $-11ab - 15ab + 26ab$

**VALOR NUMÉRICO**

Es el resultado que se obtiene al sustituir las letras por valores numéricos dados y efectuar después las operaciones indicadas.

Ejemplo: Hallar el valor numérico de  $5ab$  para  $a=1$ ,  $b=2$ .

Sustituimos la “a” por su valor 1, y la “b” por 2, y tenemos:

$$5ab = 5(1)(2) = 10$$

**Ejercicios:**

Hallar el valor numérico de las expresiones siguientes para:

$$a=1, b=2, c=3, m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{3}, p=\frac{1}{4}$$

1.  $3ab$
2.  $5a^2b^3c$
3.  $b^2mn$
4.  $24m^2n^3p$
5.  $\frac{2}{3}a^4b^2m^3$

6.  $\frac{7}{12}c^3p^2m$

7.  $\frac{4a}{3bc}$

8.  $\sqrt{2bc^2}$

9.  $4m\sqrt{12bc}$

10.  $\frac{2m}{\sqrt[3]{n^2}}$

## NOTACIÓN ALGEBRAICA

Con las cantidades algebraicas representadas por letras, pueden hacerse las mismas operaciones que con números aritméticos.

Ejemplos:

1. Escriba la suma del cuadrado de “a” con el cubo de “b”.

$$a^2 + b^3$$

2. Tenía \$9 y gasté \$x. ¿Cuánto me queda?

$$\text{Me quedan } \$(9 - x)$$

3. Un hombre tenía \$a, después recibió \$8 y luego pagó una cuenta de \$c. ¿Cuánto le queda?

$$\$(a + 8 - c)$$

4. Siendo “a” un número entero, escriba los dos números enteros consecutivos posteriores a “a”.

$$a + 1, a + 2.$$

## Ejercicios

1. Escriba la suma de “a”, “b” y “m”.
2. Escriba la suma del cuadrado de “m”, el cubo de “b” y la cuarta potencia de “x”.
3. Siendo “x” un número entero, escriba los dos números enteros consecutivos posteriores a “x”.

4. Siendo “y” un número par, escriba los tres números pares consecutivos posteriores a “y”.
5. Escriba la diferencia entre “m” y “n”.
6. Si han transcurrido “x” días de un año, ¿Cuántos días faltan por transcurrir?
7. Si “x” lápices cuestan \$50, ¿Cuánto cuesta un lápiz?
8. Escriba la suma del doble de “a” con el triple de “b” y la mitad de “c”.
9. Debía “x” euros y pagué 10, ¿Cuánto debo ahora?
10. De una distancia de “x” km. se han recorrido “m” km., ¿Cuánto falta por recorrer?

## SUMA DE MONOMIOS

Para sumar dos o más expresiones algebraicas se escriben unas a continuación de las otras con sus propios signos y se reducen los términos semejantes si los hay.

Ejemplos:

1. Sumar  $5a$ ,  $6b$  y  $8c$   
 $5a + 6b + 8c$
2. Sumar  $3a^2b$ ,  $4ab^2$ ,  $a^2b$ ,  $7ab^2$  y  $6b^3$   
 $4a^2b + 11ab^2 + 6b^3$

## Ejercicios

Sumar:

1.  $a$ ,  $b$ ,  $c$
2.  $m$ ,  $n$
3.  $-6$ ,  $9$
4.  $m$ ,  $-n$
5.  $-3ab$ ,  $4b$
6.  $5b$ ,  $-6a$
7.  $7$ ,  $-6$
8.  $-2x$ ,  $3y$
9.  $\frac{1}{2}a$ ,  $-\frac{2}{3}b$
10.  $-m$ ,  $-8n$ ,  $4n$

## SUMA DE POLINOMIOS

La suma suele indicarse incluyendo los sumandos dentro de paréntesis y después colocando todos los términos de los polinomios unos a continuación de otros con sus propios signos.

Ejemplos:

1. Sumar  $a - b$ ,  $2a + 3b - c$ ,  $-4a + 5b$

$$(a - b) + (2a + 3b - c) + (-4a + 5b) =$$

$$a - b + 2a + 3b - c - 4a + 5b =$$

$$-a + 7b - c$$

2. Sumar

$$3m - 2n + 4, 6n + 4p - 5, m - n - 4p$$

$$(3m - 2n + 4) + (6n + 4p - 5) + (m - n - 4p) =$$

$$3m - 2n + 4 + 6n + 4p - 5 + m - n - 4p = 4m + 11n - 7$$

### Ejercicios

Sumar:

1.  $3b + 2c - d$ ,  $2b + 3c + d$
2.  $m + n - p$ ,  $-m - n + p$
3.  $p + q + r$ ,  $-2p - 6q + 3r$ ,  $p + 5q - 8r$
4.  $a + b - c + d$ ,  $a - b + c - d$ ,  $-2a + 3b - 2c + d$ ,  $-3a - 3b + 4c - d$
5.  $7a - 4b + 5c$ ,  $-7a + 4b - 6c$
6.  $9x - 3y + 5$ ,  $-x - y + 4$ ,  $-5x + 4y - 9$
7.  $-2m + 3n - 6$ ,  $3m - 8n + 8$ ,  $-5m + n - 10$
8.  $-7x - 4y + 6z$ ,  $10x - 20y - 8z$ ,  $-5x + 24y + 2z$
9.  $-am + 6mn - 4s$ ,  $6s - am - 5mn$ ,  $-2s - 5mn + 3am$
10.  $3x^2 - 4xy + y^2$ ,  $-5xy + 6x^2 - 3y^2$ ,  $-6y^2 - 8xy - 9x^2$

Ejemplo:

$$(5a^n + 2) + (5a^n - 2) + (-y + 15a^n)$$

$$5a^n + 2 + 5a^n - 2 - y + 15a^n =$$

$$25a^n - y$$

**Ejercicios**

1.  $(8a - 5b - c) + (-9a + 6b - 7c)$
2.  $(8x + 7y + 78) + (9 - 8x + 5y)$
3.  $(8a + 6b - 6) + (4a - a)$
4.  $(\alpha - \beta) + (\beta - \chi) + (5\alpha + \beta) + (8\alpha + 9\beta)$
5.  $(7x^\alpha + 5\psi^\alpha + 4) + (9\psi^\alpha - 9 + 15x^\alpha)$
6.  $(5\alpha^d - 3\alpha^\mu - 7\alpha^\nu) + (-8\alpha^d + 5\alpha^\mu + 12) + (32\nu - 7)$
7.  $(z^2 + 4z) + (-5z + z^2)$
8.  $(y^3 - p^3) + (5y^2p - 4yp^2) + (y^3 + 7yp^2 - p^3)$
9.  $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy\right) + \left(\frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2\right)$
10.  $\left(\frac{3}{8}x^{2r+2} - \frac{5}{2}x^{2r+2}y\right) + \left(\frac{1}{2}x^{2r+2}y + \frac{1}{4}y^2\right)$

**RESTA DE MONOMIOS**

Se escribe el minuendo con sus propios signos y a continuación el sustraendo con los signos cambiados y se reducen los términos semejantes.

Ejemplo

$$(5a^n + 2) - (5a^n - 2) - (-y + 15a^n)$$

$$5a^n + 2 - 5a^n + 2 + y - 15a^n =$$

$$-15a^n + 4 + y$$

**Ejercicios**

1.  $(-a) - (3a)$
2.  $-11x^3 - 54x^3$
3.  $-25 - 25ab - 7ax + 1$
4.  $(15m^a) - (-236m^a)$
5.  $31c^2t - (-81c^2t)$
6.  $7a^{x+1} - 7a^{x+1}$
7.  $45a^2b^2 - \left(-\frac{1}{2}a^2b^2\right)$



$$8. 5g^3 - \frac{1}{2}g^3$$

$$9. 5 - \frac{1}{2}$$

$$10. 9a^{x+1} - 17a^{x+2} - 3a^{x+1} - 8a^{x+2}$$

## RESTA DE POLINOMIOS

Cuando el sustraendo es un polinomio, hay que restar del minuendo cada uno de los términos del sustraendo, así que a continuación del minuendo escribiremos el sustraendo cambiándole el signo a todos sus términos.

Ejemplos:

$$(a+b)-(a-b) =$$

$$a+b-a+b =$$

$$2b$$

## Ejercicios:

$$1. (x^3) - (-x^3 - 8x^2\psi - 6x\psi^2)$$

$$2. (\gamma + \beta) - (-\gamma + \beta)$$

$$3. (8v^3 - v^3 + 15) - (15v^2 - 14v + 6)$$

$$4. ax - 1 - 9ax - 3 + ax - 2 - \left(\frac{1}{64}x^4\right)$$

$$5. (\mu^2v + 7\mu v^2 - 3v^3) - (3\mu^2 - 1)$$

$$6. \frac{1}{2}w^2 - \left(-w^2 - \frac{1}{3}wr + \frac{2}{5}r^2\right)$$

$$7. 15 - \left(\frac{4}{5}xy + \frac{2}{3}yz - \frac{5}{9}\right)$$

$$8. (7a + 5b - c) + (8a + 2b + 5c)$$

$$9. (z^3 - 9\psi^3 + 6z^2\psi - 8z\psi^2) -$$

$$(18z\psi^2 - 21z^2\psi + 14z^3 - 18)$$

$$10. (a^2 - ab) - (3ab + b^2)$$

**SUMA Y RESTA COMBINADAS DE POLINOMIOS**

$$1. (6p^6 + 8pb - 5b^6) + (p^6 + 6b^6 - 7pb) - (4p^6 - ap - b^6)$$

$$2. r^2 - (rb + b^2) + (r^2 - 9b^2)$$

$$3. (a^5 + 4a^3b^2 + 8ab^4 - b^5) + (-7a^4b + 15a^2b^3 + 3b^5) - (3a^5 - 6a^3b^3 - 21ab^4 - 6)$$

$$4. (5y^4x - 7y^3x^3 + x^4) - (y^5 - 3y^3x^2 + 6yx^4) + (22y^4x + 10y^3x^2)$$

$$5. (13z^x + 6z^{x-1}) + (z^x - 7z^{x-1} + z^{x-2}) - (8z^{x+2} - 7z^{x+1} - z^x + 12z^{x-1})$$

$$6. (\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}y) + (\frac{3}{5}y - \frac{1}{6}z) + (\frac{2}{5}z + \frac{1}{4}m) - (\frac{1}{2}m + \frac{1}{3}n + \frac{3}{8})$$

$$7. 5 - (\frac{3}{2}a - \frac{2}{9}bw) + (\frac{1}{3}bw - \frac{3}{5}c) - (\frac{1}{3}bw - \frac{2}{5}c) + (-\frac{1}{7}c - \frac{5}{9}bw)$$

$$8. \text{Restar } (\frac{1}{3}c) \text{ de la suma de } (c + \frac{1}{3}b) + (-\frac{1}{3}c + \frac{1}{3}b)$$

$$9. \text{Hallar la expresión que sumada con}$$

$$(az^3 - az^2 + 5) \text{ da como resultado } (3az - 15)$$

$$10. \text{¿Qué expresión hay que sumar con } -7xy + 5x^2 - 8y^2 \text{ para que la diferencia sea } -4?$$

**SIGNOS DE AGRUPACIÓN**

Los signos de agrupación se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como un todo.

**Ejercicios**

1.  $n^3 + \{-b^2 + 2n^3\} - [n^3 + b^2]$

2.  $24a + [a - (24a + b)]$

3.  $2n - [(m - n) - (5m + n)]$

4.  $4p - [2p + 7] + [-4n - \overline{29p + 1}]$

5.  $2 + [-5x - (-2y + \{-x + y\})]$

6.  $-[-a + \{-a + (a + b) - \overline{a - b - c}\} + 7]$

En las siguientes expresiones, introducir los tres últimos términos de la expresión dentro de un paréntesis precedido del signo negativo;

7.  $x^7 - x^6 + 2x^3 - 2x + 1$

8.  $a^2 + b^2 - 2bc - c^2$

En las siguientes expresiones introducir todos los términos excepto el primero, dentro de un paréntesis precedido del signo negativo;

9.  $z + 5y + (z - 2y)$

10.  $4p - 12n + 13 - (-p + n) + (2p - 5n)$

**MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS**

Se multiplican los coeficientes y a continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, añadiendo a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores. El signo del producto vendrá dado por la Ley de los signos.

Ejemplo

$$(25x^5)(3x^2y) = ?$$

$$(25)(3) = 75$$

$$(x^5)(x^2) = x^7$$

$$(y) = y$$

$$(25x^5)(3x^2y) = 75x^7y$$

Ejercicios:

1.  $(-5x^3)(xy^2)$
2.  $(a^2b^3)(3a^2x)$
3.  $(-m^x n^a)(-6m^2n)$
4.  $(a^m)(a^{m+1})$
5.  $(3x^2y^3)(4x^{m+1}y^{m+2})$
6.  $(\frac{1}{2}a^2)(\frac{4}{5}a^3b)$
7.  $(-\frac{2}{11}a^{x+1}b^{x-3}c^2)(-\frac{44}{7}a^{x-3}b^2)$
8.  $(a)(-3a)(a^5)$
9.  $(\frac{1}{2}x^3)(-\frac{2}{3}a^2x)(-\frac{3}{5}a^4m)$
10.  $(-\frac{1}{2}x^2y)(-\frac{3}{5}xy^2)(-\frac{10}{3}x^3)(-\frac{3}{4}x^2y)$

**MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS POR MONOMIOS**

1.  $(3k^3 - x^2)(-7k)$
2.  $(a^8 - 12ab + b^2)(-a^9b^5)$
3.  $(3x^{13} - 4x^2y + 16xy^2)(ax^3y^2)$
4.  $(a^m - a^{m-1} + a^{m-2})(-2a)$
5.  $(a^m b^n + a^{m-1} b^{n+1} - a^m - 2b^{n+2})(3a^2b)$
6.  $(\frac{3}{5}a - \frac{1}{8}b^2 + \frac{2}{5}c)(-\frac{5}{3}ac^2)$
7.  $(\frac{1}{2}z^2 - \frac{2}{3}b)(-\frac{2}{5}z^5)$
8.  $(-4x^2)(35abc + 7x^2y + 5^2)$
9.  $(\frac{2}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2n - \frac{5}{6}mn^2 - \frac{1}{9}n^3)(\frac{3}{4}m^2n^3)$
10.  $(x^2)(-\frac{1}{10}y^2 + \frac{3}{8}x^5)$

**MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS POR POLINOMIOS**

1.  $(r+4)(r-1)$
2.  $(n-6)(m-4)$
3.  $(x^3+2x^2-x)(x^3+w^4+5)$
4.  $(x^2+y^3+z^2-x^2y^2-y^2z^2)(x^2+y^2+z^2)$
5.  $(v^5+2x^{n+2}-x^{n+3})(x^{2+x}+8)$
6.  $(\frac{7}{5}m^3+\frac{2}{3}mt-\frac{1}{2}t^8)(\frac{5}{2}m^2+2t^2-mt)$
7.  $4(w+5)(d-13)$
8.  $3x^2(x^2-2x+1)(x-1)$
9.  $(x+8z)[3a+2(-x+1)]$
10.  $(a+c)a^{yx}(6+6a^{xy})-5(x+8)$

**DIVISIÓN DE MONOMIOS**

1.  $-55a^2 \div (-3a)$
2.  $14t^3b^4 \div -7tb^2$
3.  $54x^2y^2z^3 \div (-6xy^2z^3)$
4.  $15m^8z^7 \div (-5z^3)$
5.  $-5manx^3 \div (-5mn^2x^3)$
6.  $a^{m+3} \div a^{m+2}$
7.  $2p^{z-7} \div -(p^{z+2})$
8.  $\frac{1}{2}x^2 \div \frac{2}{3}$
9.  $-2 \div \frac{4}{9}a^2b^3$
10.  $3m^4n^{87}w^6 \div (-\frac{1}{3}m^4nw^8)$

## DIVISIÓN DE POLINOMIOS POR MONOMIOS

La **ley distributiva de la división** se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio separando los cocientes parciales con sus propios signos.

**Ejemplo:**

$$\begin{aligned} &\text{Dividir } \frac{3a^2 - 6a^2b + 9ab^2}{3a}. \\ &(3a^2 - 6a^2b + 9ab^2) \div 3a = \\ &\frac{3a^2}{3a} - \frac{6a^2b}{3a} + \frac{9ab^2}{3a} = \\ &a^2 - 2ab + 3b^2. \end{aligned}$$

Ejercicios:

$$1.- \frac{a^2 - ab}{a}.$$

$$2.- \frac{3x^2y^3 - 5a^2x^4}{-3x^2}.$$

$$3.- \frac{3a^3 - 5ab^2 - 6a^2b^3}{-2a}.$$

$$4.- \frac{x^3 - 4x^2 + x}{x}.$$

$$5.- \frac{4x^8 - 10x^6 - 5x^4}{2x^3}.$$

$$6.- \frac{6m^3 - 8m^2n + 20mn^2}{-2m}.$$

$$7.- \frac{6a^8b^8 - 3a^6b^6 - a^2b^3}{3a^2b^3}.$$

$$8.- \frac{x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 15x}{-5x}.$$

$$9.- \frac{8m^9n^2 - 10m^7n^4 - 20m^5n^6 + 12m^3n^8}{2m^2}.$$

$$10.- \frac{a^x + a^{m-1}}{a^2}.$$

## DIVISIÓN DE DOS POLINOMIOS

Se divide el primer término de la ecuación dividiendo entre el divisor y se efectúan las operaciones anteriores; y así sucesivamente hasta que el residuo sea cero.

Ejemplo:

dividir  $\frac{3x^2 + 2x - 8}{x + 2}$ .

$$\begin{array}{r} 3x - 4 \\ x + 2 \overline{) 3x^2 + 2x - 8} \\ \underline{- 3x^2 - 6x} \phantom{- 8} \\ - 4x - 8 \\ \underline{+ 4x + 8} \\ 0 \end{array}$$

Ejercicios:

1.-  $\frac{a^2 + 2a - 3}{a + 3}$ .

2.-  $\frac{a^2 - 2a - 3}{a + 1}$ .

3.-  $\frac{x^2 - 20 + x}{x + 5}$ .

4.-  $\frac{m^2 - 11m + 30}{m - 6}$ .

5.-  $\frac{x^2 + 15 - 8x}{3 - x}$ .

6.-  $\frac{6 + a^2 + 5a}{a + 2}$ .

7.-  $\frac{6x^2 - xy - 2y^2}{y + 2x}$ .

8.-  $\frac{-15x^2 - 8y^2 + 22xy}{2y - 3x}$ .

9.-  $\frac{5a^2 + 8ab - 21b^2}{a + 3b}$ .

10.-  $\frac{14x^2 - 12 + 22x}{7x - 3}$ .

## DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

Se llama factores o divisores de una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre si dan como producto la primera expresión.

Así, multiplicando “a” por “a+b” tenemos:

$$a(a+b) = a^2 + ab$$

“a” y “a+b”, que multiplicadas entre si dan como producto  $a^2 + ab$ , son factores o divisores de  $a^2 + ab$

1.-  $3a^2 + 2ab$ .

2.-  $b + b^2$ .

3.-  $x^2 + x$ .

4.-  $3a^3 - a^2$ .

5.-  $x^3 - 4x^4$ .

6.-  $5m^2 + 15m^3$ .

9.-  $2a^2x + 6ax^2$ .

10.-  $8m^2 - 12mn$ .

7.-  $ab - bc$ .

8.-  $x^2y + x^2z$ .



## SIMPLIFICACIÓN Y REDUCCIÓN DE FRACCIONES

**Reducir una fracción algebraica** es cambiar su forma sin cambiar su valor.

**Simplificar una fracción algebraica** es convertirla en una fracción equivalente cuyos términos sean primos entre sí.

Cuando los términos de una fracción son primos entre sí, la fracción es irreducible y entonces la fracción está reducida a su más simple (mínima) expresión.

Simplificar:  $\frac{4a^2b^5}{6a^3b^3m} = \frac{2b^2}{3am}$ .

Se dividió 4 y 6 entre 2 y se obtuvo 2 y 3; “a<sup>2</sup>” y “a<sup>3</sup>” entre “a<sup>2</sup>” y se obtuvieron los cocientes 1 y “a”; “b<sup>5</sup>” y “b<sup>3</sup>” entre “b<sup>3</sup>” y se obtuvieron los cocientes “b<sup>2</sup>” y 1. Como “2b<sup>2</sup>” y “3am” no tienen ningún factor común, esta fracción que resulta es irreducible.

### Ejercicios:

1.-  $\frac{a^2}{ab}$ .

2.-  $\frac{2a}{8a^2b}$ .

3.-  $\frac{x^2y^2}{x^3y^3}$ .

4.-  $\frac{ax^3}{4x^5y}$ .

5.-  $\frac{6m^2n^3}{3m}$ .

6.-  $\frac{9x^2y^3}{24a^2x^3y^4}$ .

7.-  $\frac{8m^4n^3x^2}{24mn^2x^2}$ .

8.-  $\frac{12x^3y^4z^5}{32xy^2z}$ .

9.-  $\frac{12a^2b^3}{60a^3b^5x^6}$ .

10.-  $\frac{21mn^3x^6}{28m^4n^2x^2}$ .

## SUMA DE FRACCIONES

Simplificar  $\frac{x-4a}{2ax} + \frac{x-2}{5x^2} + \frac{1}{10x}$ .

El m.c.m. de los denominadores es 10ax<sup>2</sup>. dividiendo 10ax<sup>2</sup> entre cada denominador y multiplicando los cocientes por el numerador respectivo, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{x-4a}{2ax} + \frac{x-2}{5x^2} + \frac{1}{10x} &= \frac{5x(x-4a) + 2a(x-2) + ax}{10ax^2} \\ &= \frac{5x^2 - 20ax + 2ax - 4a + ax}{10ax^2} \end{aligned}$$

Reduciendo términos semejantes =  $\frac{5x^2 - 17ax - 4a}{10ax^2}$

### Ejercicios:

1.-  $\frac{x-2}{4} + \frac{3x+2}{6}$ .

2.-  $\frac{2}{5a^2} + \frac{1}{3ab}$ .

$$3.- \frac{a-2b}{15a} + \frac{b-a}{20b}.$$

$$4.- \frac{a+3b}{3ab} + \frac{a^2b-4ab^2}{5a^2b^2}.$$

$$5.- \frac{a-1}{3} + \frac{2a}{6} + \frac{3a+4}{12}.$$

$$6.- \frac{n}{m^2} + \frac{3}{mn} + \frac{2}{m}.$$

$$7.- \frac{1-x}{2x} + \frac{x+2}{x^2} + \frac{1}{3ax^2}.$$

$$8.- \frac{2a-3}{3a} + \frac{3x+2}{10x} + \frac{x-a}{5ax}.$$

$$9.- \frac{3}{5} + \frac{x+2}{2x} + \frac{x^2+2}{6x^2}.$$

$$10.- \frac{x-y}{12} + \frac{2x+y}{15} + \frac{y-4x}{30}.$$

## RESTA DE FRACCIONES

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores es  $6a^2b$ . Dividiendo entre cada denominador y multiplicando cada cociente por el numerador respectivo se obtiene:

$$\frac{a+2b}{3a} - \frac{4ab^2-3}{6a^2b} = \frac{2ab(a+2b)}{6a^2b} - \frac{4ab^2-3}{6a^2b}$$

$$\text{Multiplicando} = \frac{2a^2b+4ab^2}{6a^2b} - \frac{4ab^2-3}{6a^2b}$$

$$\begin{aligned} &\text{Restando los numeradores} \\ &= \frac{2a^2b+4ab^2-(4ab^2-3)}{6a^2b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Quitando el paréntesis} \\ &= \frac{2a^2b+4ab^2-4ab^2+3}{6a^2b} \end{aligned}$$

$$\text{Reduciendo} = \frac{2a^2b+3}{6a^2b}$$

## Ejercicios:

$$1.- \frac{x-3}{4} - \frac{x+2}{8}.$$

$$2.- \frac{a+5b}{a^2} - \frac{b-3}{ab}.$$

$$3.- \frac{2}{3mn^2} - \frac{1}{2m^2n}.$$

$$4.- \frac{a-3}{5ab} - \frac{4-3ab^2}{3a^2b^3}.$$

$$5.- \frac{2a+3}{4a} - \frac{a-2}{8a}.$$

$$6.- \frac{y-2x}{20x} - \frac{x-3y}{24y}.$$

$$7.- \frac{x-1}{3} - \frac{x-2}{4} - \frac{x+3}{6}.$$

$$8.- \frac{3}{5} - \frac{2a+1}{10a} - \frac{4a^2+1}{20a^2}.$$

$$9.- \frac{3}{5x} - \frac{x-1}{3x^2} - \frac{x^2+2x+3}{15x^3}.$$

$$10.- \frac{1}{2a} - \frac{2+b}{3ab} - \frac{5}{6a^2b^3}.$$

**SUMA Y RESTA COMBINADA DE FRACCIONES**

Simplificar  $\frac{1}{a^2 - ab} + \frac{1}{ab} - \frac{a^2 + b^2}{a^3b - ab^3}$ .

Buscando el común denominador:  $a^2 - ab = a(a - b)$  m.c.m.  $ab(a + b)(a - b)$ .

$ab = ab$   
 $a^3b - ab^3 = ab(a^2 - b^2) = ab(a + b)(a - b)$ .

Se obtiene: 
$$\frac{1}{a^2 - ab} + \frac{1}{ab} - \frac{a^2 + b^2}{a^3b - ab^3}$$

$$= \frac{b(a + b) + (a + b)(a - b) - (a^2 + b^2)}{ab(a + b)(a - b)}.$$

(Multiplicando) = 
$$\frac{ab + b^2 + a^2 - b^2 - a^2 - b^2}{ab(a + b)(a - b)}$$

(Reduciendo) = 
$$\frac{ab - b^2}{ab(a + b)(a - b)}$$

(Simplificando) = 
$$\frac{b(b - a)}{ab(a + b)(a - b)} = \frac{1}{a(a + b)}.$$

**Ejercicios:**

1.-  $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2} - \frac{4x-7}{x^2-x-6}$ .

2.-  $\frac{a}{3a+6} - \frac{1}{6a+12} + \frac{a+12}{12a+24}$ .

3.-  $\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{3x} - \frac{1}{x^2}$ .

4.-  $\frac{a+3}{a^2-1} + \frac{a-1}{2a+2} + \frac{a-4}{4a-4}$ .

5.-

$$\frac{a-b}{a^2+ab} + \frac{a+b}{ab} - \frac{a}{ab+b^2}.$$

6.-

$$\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} + \frac{4x^2}{x^2-y^2}.$$

7.-  $\frac{x}{a^2-ax} + \frac{1}{a} + \frac{1}{x}$ .

8.-

$$\frac{x+1}{x^2-x-20} - \frac{x+4}{x^2-4x-5} + \frac{x+5}{x^2+5x+4}.$$

9.-

$$\frac{2x+1}{12x+8} - \frac{x^2}{6x^2+x-2} + \frac{2x}{16x-8}.$$

10.-

$$\frac{1}{ax} - \frac{1}{a^2+ax} + \frac{1}{a+x}.$$

## DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para efectuar la división de fracciones se procede de la siguiente forma:

1. Se invierte el divisor (el numerador se coloca en el denominador y viceversa) y se procede a multiplicar el dividendo por éste.
2. Las fracciones se multiplican siguiendo los pasos siguientes:
  - a) Se factorizan las expresiones.
  - b) Se simplifica, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores.
  - c) Se multiplican entre si las expresiones que quedan en los numeradores; lo propio se hace con las expresiones que quedan en los denominadores; para obtener el resultado, se ubica en el numerador el producto de los numeradores y en el denominador el producto de los denominadores.

Se multiplica el dividendo por el divisor invertido

Ejemplo:

$$\frac{8a^2b^6}{2ac^4} \div \frac{4bc^2}{6a^4} = \frac{8a^2b^6}{2ac^4} \times \frac{6a^4}{4bc^2} = \frac{48a^6b^6}{8abc^6} = \frac{8a^5b^5}{c^6}$$

### Ejercicios

$$1. \frac{a^3}{5c^2} \div \frac{15ac^4}{b^5}$$

$$3. \frac{12y^6x^3}{9x^6} \div \frac{2y^3}{x^4}$$

$$2. \frac{4m^2n^3}{n} \div \frac{8m^6}{n^2}$$

$$4. \frac{y+3}{2} \div \frac{2x-y}{5}$$

$$5. \frac{b^2 + 2c + 4a^3}{2a^2} \div \frac{3c^4 - 5b}{b^3}$$

$$6. \frac{12x + y^2}{8x^2} \div \frac{x^3 - y}{2y}$$

$$7. \frac{2ny + 3mx - 5xy}{2x + 3y} \div 3n + 5m$$

$$8. \frac{a^8 + b^5 + 2c^2}{6b^3 - 4b} \div \frac{2a^2}{3c}$$

$$9. \frac{y^3 + 2}{3y^4 - 2y + 4} \div \frac{6y^2 + 2y^3 - y}{3y^6 - 2y^1}$$

$$10. \frac{6m^5 + n^2 + 3mn^3}{2m^3n^2 - 3m} \div \frac{2n^3 + 5m^2 - 7m^2n^3}{4m^5n^2 + 5n}$$

## MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN COMBINADAS

1. Se invierten las fracciones precedidas del signo de división y se cambia el signo operativo por la  $\times$

2. Las fracciones se multiplican siguiendo los pasos siguientes:

a) Se factorizan las expresiones.

b) Se simplifica, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores.

c) Se multiplican entre si las expresiones que quedan en los numeradores; lo propio se hace con las expresiones que quedan en los denominadores; para obtener el resultado se ubica en el numerador el producto de los numeradores y en el denominador el producto de los denominadores.

Cuando haya que efectuar operaciones en las que se combinen Multiplicaciones y divisiones se procederá a convertir los divisores en factores, invirtiéndolos, y procediendo según la regla de la multiplicación.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{4y}{2x} \div \frac{5x^6}{6y^3} \times \frac{y^2}{z^3} &= \frac{4y}{2x} \div \left( \frac{5x^6}{6y^3} \times \frac{y^2}{z^3} \right) = \frac{4y}{2x} \div \left( \frac{5x^6y^2}{6y^3z^3} \right) = \\ \frac{4y}{2x} \times \frac{6y^3z^3}{5x^6y^2} &= \frac{12y^4z^3}{5x^7y^2} = \frac{12y^2z^3}{5x^7} \end{aligned}$$

## Ejercicios

$$1. \frac{6b}{2c^2} \times \frac{3a^3}{2b^4} \div \frac{5c}{a^7}$$

$$2. \frac{b-1}{b+1} \times \frac{2b-b}{b^2+1} \div \frac{b^2+b}{b^2+b-2}$$

$$3. \frac{y^2+y-6}{y^2-16} \div \frac{y^2-y-25}{y^2+y+10} \times \frac{5y+25y^2}{y+5}$$

$$4. \frac{x^5 + 6x^2}{x^3 - 36} \div \left( \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 3} \times \frac{x + 2x^2}{2x^2 - 4x^4} \right)$$

$$5. \frac{6m + n}{5m^2} \div \frac{3n^2 - 4m^3}{2n^4} \times \frac{m + 2n}{2m}$$

$$6. \frac{\frac{7z^6 + w^3}{3z^2} \times \frac{1}{z^4 + z^2 - w}}{4z^2 - w^2} \times \frac{z^3 + 8w^3}{8z^2 - 2zw - w^2} \times \frac{1}{9z^2 + 18zw + w^2}$$

$$7. \frac{(x^2 - 2x)}{4 - x^2} \times \frac{18 - x^2}{2x - (x + 2)^2} \div \frac{x^4 - 4x^2}{(x^2 + 2x)^2}$$

$$8. \frac{x^3 - 2xy - 5y^6}{2x^2y - 3xy} \div \frac{3x^2 + 2y^2}{8x^6 - 2xy - y^2} \times \frac{16x^2 + 8xy + y^2}{x^3 + xy^2}$$

$$9. \frac{(m + n)^2 - a^2}{(m - n)^2 - a^2} \times \frac{(m + a)^2 - n^2}{m^2 + mn - ma} \div \frac{m + n + a}{m^2}$$

$$10. \frac{x^3 + 1}{2x - 6} \div \left( \frac{x^2 + x}{4x - 8} \times \frac{2x^4 + 9}{x^4 + 3x} \right) \div \left( \frac{5x}{2x^4} \times \frac{6x^4 + 3x^5 - 2}{3x^4 - x^2} \right)$$

## SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

1. Se transforma el numerador y denominador con el propósito de identificar los factores comunes
2. Se cancelan los factores comunes en numerador y denominador

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{ad}{bc} \\ \frac{c}{d} &= \frac{ad}{bc} \\ \frac{m}{n} - \frac{n}{m} &= \frac{\frac{m^2 - n^2}{mn}}{\frac{n + m}{n}} = \frac{m^2n - n^3}{n^2m + m^2n} = \frac{n(m^2 - n^2)}{mn(n + m)} \\ &= \frac{n(m - n)(m + n)}{nm(n + m)} = \frac{n(m - n)}{mn} = \frac{m - n}{m} \end{aligned}$$

Ejercicios:

$$1. \frac{\frac{c}{a} - \frac{b}{c}}{1 - \frac{a}{c}}$$

$$3. 4 + \frac{5b}{2a}$$

$$5. \frac{\frac{3}{c} + \frac{9}{c^2} + \frac{18}{c^3}}{8 - \frac{c}{2}}$$

$$7. \frac{\frac{\frac{x^2}{y} + \frac{x^2 - y^2}{x + y}}{\frac{x - y}{x} - \frac{y}{x}}}{x}$$

$$9. \frac{\frac{1}{\frac{1}{c} + a} - \frac{a + c}{\frac{1}{1 + c}}}{a}$$

$$10. \frac{\frac{\frac{x + y + z}{x + z} - \frac{1}{x - y + z}}{\frac{1}{x - z} - \frac{1}{x + y}}}{x - z}$$

$$2. \frac{\frac{\frac{1}{m} + \frac{m}{n}}{\frac{1}{m} + \frac{n}{m}}}{m}$$

$$4. \frac{\frac{\frac{x - a}{x^2} + \frac{a^2}{x + a}}{\frac{x - a}{x^2} - \frac{a^2}{x + a}}}{x}$$

$$6. \frac{5 + b + \frac{2b + 6}{b + 2}}{b - \frac{b + 6}{b + 2}}$$

$$8. \frac{\frac{\frac{a + b}{a^2 + b^2} - \frac{a - b}{a + b}}{\frac{a^2}{a + b} + \frac{a + 2b}{b}}}{b}$$

## FÓRMULAS

**Fórmula:** es la expresión de una ley o de un principio general por medio de símbolos o letras.

Ventaja de las fórmulas algebraicas.

- Expresan brevemente una ley o principio general.
- Son fáciles de recordar
- Su aplicación es muy fácil
- Una fórmula señala la relación que existe entre las variables que en ella intervienen, la variable cuyo valor se da por medio de una fórmula es directamente proporcional con las variables que se hallan en el numerador del segundo miembro e inversamente proporcional con las que se hallen en el denominador, si las demás permanecen constantes.

Para traducir una fórmula al lenguaje vulgar, esto es, para describir la regla contenida en una fórmula, basta con sustituir las letras por las magnitudes que ellas representan y expresar las relaciones que la fórmula nos dice existen entre ellas.

Ejemplo:

$A = (\pi r) \times r^2$  = Siendo “A” el área de un círculo, “pi” la circunferencia entre el diámetro y “r” el radio.

### Solución

El área de un círculo es igual al valor de “pi” (circunferencia entre el diámetro) por el cuadrado de la distancia desde el centro del círculo hacia cualquier punto de él.

### Ejercicios

1.  $A = a^3$  ; Siendo “A” el área de un cuadrado y “a” uno de sus lados.
2.  $V = \left(\frac{1}{3}\right)b \times h$  ; Siendo “V” el volumen de un cono, “b” su base y “h” su altura.
3.  $A = a \times b$  ; Siendo “A” el área de un rectángulo y “a” y “b” sus lados.
4.  $V = \frac{d}{t}$  ; Siendo “V” la velocidad, “d” la distancia y “t” el tiempo.



5.  $F = m \times a$  ; Siendo “F” la fuerza, “m” la masa y “a” la aceleración.
6.  $M = \frac{n}{PM}$  ; Siendo “M” la molaridad, “n” número de moles y “PM” el peso molecular.
7.  $n = \frac{m}{PM}$  ; Siendo “n” el número de moles, “m” la masa y “PM” peso molecular.
8.  $h = \sqrt{ca^2 + co^2}$  ; Siendo “h” la hipotenusa de un triángulo, “ca” cateto adyacente y “co” cateto opuesto.
9.  $t = \frac{v_f - v_i}{a}$  ; Siendo “t” el tiempo, “ $v_f$ ” velocidad final y “ $v_i$ ” velocidad inicial.
10.  $P = a + b + c$  ; Siendo “P” el perímetro de un triángulo y “a”, “b” y “c” cada uno de los lados.

## INECUACIONES

Una **inecuación** es una expresión matemática la cual se caracteriza por signos de desigualdad; Siendo una expresión algebraica nos da como resultado un conjunto en el cual la variable independiente puede tomar el valor cualesquiera de ese conjunto cumpliendo esta desigualdad; a este conjunto se le conoce como Intervalo.

Se puede sumar o restar una misma cantidad a los dos miembros de una desigualdad y el sentido de la desigualdad no se altera.

El sentido de la desigualdad no cambia si se multiplican o dividen los dos miembros por una cantidad positiva.

La desigualdad no cambia si se trata sólo de potencias positivas.

La desigualdad no cambia si se trata sólo de raíces positivas.

Cuando en una desigualdad se desconoce el valor de alguno de los elementos que participan, se tiene una inecuación. Resolver una inecuación significa encontrar todos los valores de la incógnita que hacen verdadera la desigualdad. Todos esos valores forman el conjunto solución.

**Intervalo.** - Segmento o porción de la recta real.

**Tipos de intervalo:**

a) Abierto – Abierto  $\left( \frac{x}{-} \right)_{x1} x2$

b) Cerrado – Abierto  $\left[ \frac{x}{-} \right)_{x1} x2$

c) Abierto – Cerrado  $\left( \frac{x}{-} \right]_{x1} x2$

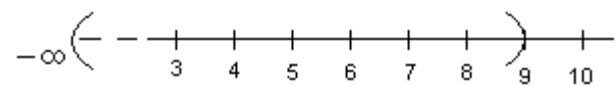
d) Cerrado – Cerrado  $\left[ \frac{x}{-} \right]_{x1} x2$

**Ejemplo:**

$$2x + 16 < x + 25$$

$$2x - x + 16 - 16 < x + 25 - x - 16$$

$$x < 9$$



**Ejercicios**

1.  $-3 < 4x - 9 < 11$

2.  $6x - 10 \geq 5x - 16$

3.  $4 < 5 - 3x < 7$

4.  $3x + 5 > 7x + 17$

5.  $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$

6.  $2 + 3x < 5x + 1 < 16$

7.  $x^2 - 5x + 6 > 0$

8.  $4x^2 - 5x - 6 < 0$

$$9. \frac{2x-3}{x+1} > 0$$

$$10. \frac{7}{2x} > 3$$

## POTENCIA DE UN MONOMIO

**POTENCIA** de una expresión algebraica es la misma expresión o el resultado de tomarla como factor dos o más veces.

La primera potencia de una expresión es la misma expresión.

$$\text{Así } (2a)^1 = 2a$$

La segunda potencia o cuadrado de una expresión es el resultado de tomarla como factor dos veces. Así,

$$(2a)^2 = 2a \times 2a = 4a^2$$

En general,  $(2a)^n = 2a \times 2a \times 2a \dots n \text{ veces}$ .

**Signo de las potencias.** Cualquier potencia de una cantidad positiva evidentemente es positiva, porque equivale a un producto en que todos los factores son positivos.

En cuanto a las potencias de una cantidad negativa, corresponde:

- 1) Toda potencia par de una cantidad negativa es positiva
- 2) Toda potencia impar de una cantidad negativa es negativa

$$\text{Así } (-2a)^2 = (-2a) \times (-2a) = 4a^2$$

### Potencia de un monomio

Para elevar un monomio a una potencia se eleva su coeficiente a esa potencia y se multiplica el exponente de cada letra por el exponente que indica la potencia.

Si el monomio es negativo, el signo de la potencia es + cuando el exponente es par, y es – cuando el exponente es impar.

Ejemplo:

$$(3ab^2)^3 = 3^{1 \times 3} a^{1 \times 3} b^{2 \times 3} = 27a^3b^6 \quad (2x^2y)^4 = 2^{1 \times 4} x^{2 \times 4} y^{1 \times 4}$$

$$(-3mn^3)^3 = -3^{1 \times 3} m^{1 \times 3} n^{3 \times 3} = -27m^3n^9$$

$$\left( \frac{4a^2b}{3b^2} \right)^2 = \frac{(4a^2b)^2}{(3b^2)^2} = \frac{16a^4b^2}{9b^4} = \frac{16a^4}{9b^2}$$

**Ejercicios**

1.  $(3xy^3)^2$
2.  $(-6a^2b)^3$
3.  $(2m^2n^3)^3$
4.  $(7m^4y^5z^7)^2$
5.  $\left(\frac{-y}{3x}\right)^2$
5.  $\left(\frac{2x^3n^2}{3n}\right)^5$
7.  $\left(\frac{a^2b^2c^3}{2}\right)^4$
8.  $\left(\frac{-2}{3}yz^5\right)^6$
9.  $\left(\frac{3x^2y^2z^2}{x^3y^6}\right)^4$
10.  $\left(\frac{-2}{5}m^2n^3\right)^4$

**PRODUCTOS NOTABLES.**

Se llama productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación.

**CUADRADO DE UN BINOMIO**

1. "El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el doble producto de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad"
2. "El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el doble producto de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad"

*El producto de dos o más potencias con igual base, se escribe la base común y se suman los exponentes.*

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(3a^6 - 5a^2b^4)^2 &= (3a^6)^2 - 2(3a^6)(5a^2b^4) + (5a^2b^4)^2 \\ &= 9a^{12} - 30a^8b^4 + 25a^4b^8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}y^2\right)^2 &= \left(\frac{1}{3}x^3\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}x^3 \frac{5}{2}y^2\right) + \left(\frac{5}{2}y^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{9}x^6 + \frac{5}{3}x^3y^2 + \frac{25}{4}y^4\end{aligned}$$

## Ejercicios

- |                                                        |                                          |
|--------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| 1. $(x^2 + 6y^3)^2$                                    | 9. $\left(\frac{3}{5}a^2c + 6a\right)^2$ |
| 2. $(ab^2 - b^4)^2$                                    |                                          |
| 3. $(5mn^3 + 5m^2n)^2$                                 | 10. $\left(7b + \frac{5}{6}a\right)^2$   |
| 4. $(xy - m^3n^2)^2$                                   | 11. $(m + 3)^2$ .                        |
| 5. $\left(\frac{1}{5}a^6 - \frac{2}{7}a^2b^5\right)^2$ | 12. $(5 + x)^2$ .                        |
| 6. $\left(\frac{x}{4} + \frac{5y^2}{x^2}\right)^2$     | 13. $(6a + b)^2$ .                       |
|                                                        | 14. $(9 + 4m)^2$ .                       |
|                                                        | 15. $(7x + 11)^2$ .                      |
| 7. $\left(\frac{2}{3}a^2b + \frac{5}{6}b^3\right)^2$   | 16. $(x + y)^2$ .                        |
|                                                        | 17. $(1 + 3x^2)^2$ .                     |
| 8. $\left(\frac{5}{2y} - \frac{3x^2}{xy}\right)^2$     | 18. $(2x + 3y)^2$ .                      |
|                                                        | 19. $(a^2x + by^2)^2$ .                  |
|                                                        | 20. $(3a^3 + 8b^4)^2$ .                  |

## CUBO DE UN BINOMIO

1. Se emplean las fórmulas generales:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

2. Se identifican “a” y “b” y se aplican en alguna de las fórmulas anteriores, según corresponda

3. Se efectúan las operaciones indicadas

4. Se reduce

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(5a^2 + 6a^2b^3)^3 &= (5a^2)^3 + 3(5a^2)^2(6a^2b^3) + \\ &3(5a^2)(6a^2b^3)^2 + (6a^2b^3)^3 \\ &= 125a^6 + 3(25a^4)(6a^2b^3) + 3(5a^2)(36a^4b^6) + \\ &(216a^6b^9) \\ &= 125a^6 + 450a^6b^3 + 720a^6b^6 + 216a^6b^9\end{aligned}$$

**Ejercicios**

1.  $(3x + 2y)^3$

2.  $(5x^4 + 6y^2)^3$

3.  $(7b^2 - 4c^5)^3$

4.  $(3m^3 + 2n^2)^3$

5.  $\left(\frac{2}{5}b - \frac{6}{7}c\right)^3$

6.  $\left(\frac{x}{3y} + \frac{2y}{2x^2}\right)^3$

7.  $\left(5x^3 - \frac{2y}{x^4}\right)^3$

8.  $\left(\frac{3}{2} - m^4n^3\right)^3$

9.  $\left(\frac{1}{7}m^3 - \frac{5}{3}n^2\right)^3$

10.  $\left(\frac{3}{2}y^2 + 6y^4\right)^3$

**CUADRADO DE UN POLINOMIO**

Para hallar el cuadrado de un polinomio, se procede de la siguiente manera:

1. Se aplica la siguiente regla: "El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de sus términos más el doble de las combinaciones binarias que con ellos puede formarse".
2. Se efectúan las operaciones que quedan indicadas
3. Se reducen términos semejantes

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 (m^3 - 2m + 3)^2 &= \\
 (m^3)^2 + (-2m)^2 + (3)^2 + 2(m^3)(-2m) + \\
 2(m^3)(3) + 2(-2m)(3) &= \\
 = m^6 + 4m^2 + 4m^2 - 12m + 9
 \end{aligned}$$

**Ejercicios:**

1.  $(y^2 - 5y + 25)^2$

2.  $(2m^3 + 3m^4 + 5)^2$

3.  $(4b^5 - 2b^3 + 6)^2$

4.  $\left(\frac{1}{5}y^2 - y + 5\right)^2$

5.  $\left(\frac{3}{9}x^6 + \frac{1}{5}\right)^2$

7.  $(x^3 + x^5 + x^6 + x^2 + x^7)^2$

6.  $\left(\frac{1}{6}m + \frac{1}{2}m^2 + m + \frac{1}{3}m^3 + 6\right)^2$

8.  $\left(6y^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{7}{5}y^9\right)^2$

$$9. \left( \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{7}x^5 + x + x^2 \right)^2$$

$$10. \left( 1 + \frac{5}{8}n^9 + \frac{7}{6}n^2 + \frac{1}{5}n \right)^2$$

### BINOMIO DE NEWTON

Para desarrollar un binomio elevado a una potencia entera y positiva, se procede de la siguiente manera:

Se aplica la fórmula descubierta por Newton que permite elevar un binomio a una potencia cualquiera directamente, sin tener que hallar las potencias anteriores

$$\begin{aligned} (a+b)^n = & \\ & a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \\ & \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots b^n \end{aligned}$$

**Nota:** los factores de los coeficientes de los términos también se pueden obtener a partir del "Triángulo de Pascal".

Ejemplo:

Datos:

$$n = 5$$

$$a = y$$

$$b = 3$$

$$(y-3)^5$$

$$n-1 = 4$$

$$n-2 = 3$$

$$n-3 = 2$$

$$n-4 = 1$$

Solución:

$$(y-3)^5 = (y)^{1 \times 5} - 5(y)^{5-1}(3) + \frac{5(4)}{1.2}y^{5-2}(3)^2 -$$

$$\frac{5(4)(3)}{1.2.3}y^{5-3}(3)^3 + \frac{5(4)(3)(2)}{1.2.3.4}y^{5-4}(3)^4 - (3)^5$$

$$= y^5 - 15y^4 + 90y^3 - 270y^2 + 405y - 243$$

**Ejercicios**

1.  $(m-2)^3$

2.  $(x+y)^5$

3.  $(3x+4y)^6$

4.  $(m^2+2m)^7$

5.  $\left(2x-\frac{y}{3}\right)^4$

6.  $(1-y^2)^5$

7.  $\left(\frac{1}{9}-\frac{2a}{3}\right)^8$

8.  $(x^2+y^3)^3$

9.  $(5x+2)^9$

10.  $\left(\frac{1}{5}m+m^3\right)^5$



## CONJUNTOS

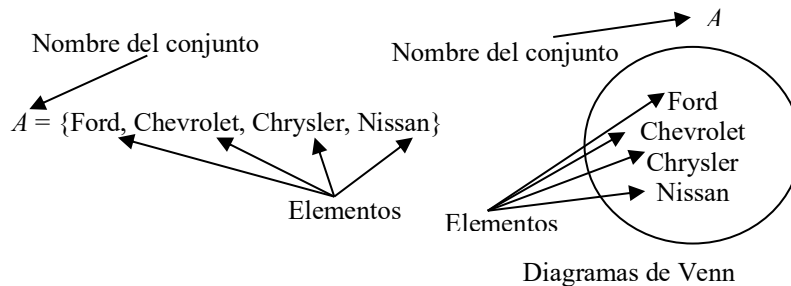
La palabra conjunto, implica la colección de objetos que se caracterizan en algo común. En matemática tiene el mismo significado, sólo que a estos objetos se les llama elementos o miembros del conjunto.

Por lo que se define a un conjunto como: “una colección bien definida de objetos de cualquier clase.”

Ejemplo:

$$A = \{\text{Ford, Chevrolet, Chrysler, Nissan}\}$$

La letra  $A$  es el nombre del conjunto y todo lo que se encuentra entre las llaves, son los elementos que lo conforman; cada uno de los elementos tiene algo en común, son marcas de vehículos.



Otra forma de representar un conjunto es mediante diagramas de Venn, tal como lo muestra la figura anterior, mediante un círculo que contiene dentro todos los elementos que conforman al conjunto y en la parte superior el nombre de este.

**Ejercicios:** Representar los siguientes conjuntos en diagramas de Venn:

1.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
2.  $B = \{a, b, c, d, e, f\}$
3.  $C = \{\text{José, Juan, Alfredo}\}$
4.  $D = \{\text{blanco, negro, azul}\}$
5.  $E = \{\text{Matemáticas, Física, Química}\}$
6. El conjunto conformado por elementos que conformen los primeros 5 números pares.
7. Representar el conjunto anterior en notación tradicional.

## TIPOS DE CONJUNTOS

### CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Un conjunto finito es aquel, en el que el número de elementos se encuentra bien determinado; por ejemplo, el conjunto que contiene las letras del alfabeto. De forma inversa, un conjunto infinito, es aquel que no contiene un número determinado de elementos; por ejemplo, el conjunto que contiene todos los números enteros.

Ejemplo:

*Conjunto finito:*  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, m, n, \tilde{n}, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$

*Conjunto infinito:*  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, n\}$

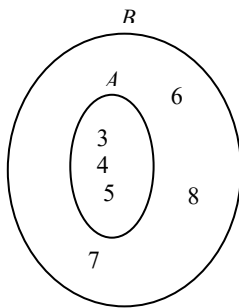
### CONJUNTO VACÍO

El conjunto vacío es aquel conjunto que carece de elementos y se representa por el símbolo  $\emptyset$ .

### SUBCONJUNTO

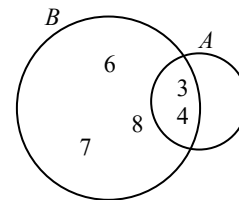
Se dice que  $A$  es subconjunto de  $B$ , o  $A \subset B$  cuando todos los elementos de  $A$  los contiene  $B$ , por ejemplo:

$$A = \{3, 4, 5\}; B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\};$$



$A \subset B$  porque todos los elementos de  $A$  los contiene  $B$

$$A = \{3, 4, 5\}; B = \{3, 5, 6, 7, 8\};$$



$A$  no es un subconjunto de  $B$ , o  $A \not\subset B$  cuando por lo menos uno de los elementos de  $A$  no se encuentra en  $B$ .

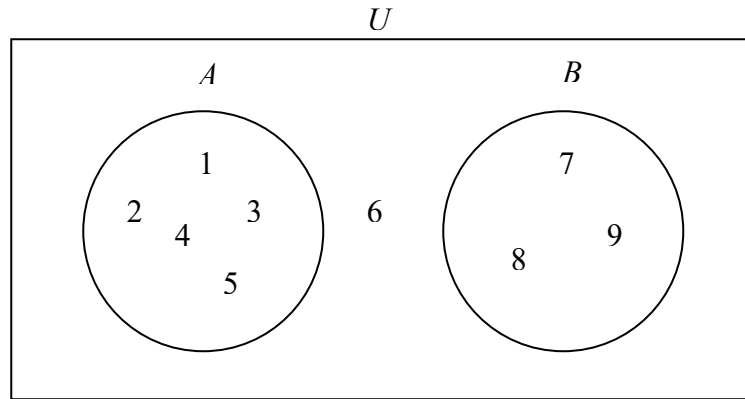
### CONJUNTO UNIVERSAL

El conjunto universal ( $U$ ), es aquel que contiene todos los elementos existentes dentro de un contexto determinado.

Ejemplo:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}; A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; B = \{7, 8, 9\}$$

El conjunto universal, es el que contiene todos los números enteros del 1 al 9, por lo tanto; los conjuntos  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $U$ .



## OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Es posible obtener nuevos conjuntos, a partir de conjuntos existentes mediante operaciones conocidas como “operaciones entre conjuntos”. Esos conjuntos heredan características de uno y otro.

## OPERACIONES FUNDAMENTALES

Dentro de las operaciones fundamentales que se tienen entre conjuntos se encuentran la unión ( $\cup$ ), intersección ( $\cap$ ), complemento ( $'$ ) y resta ( $-$ ). Dichas operaciones pueden ser fácilmente representadas mediante diagramas de Venn.

Ejemplo:

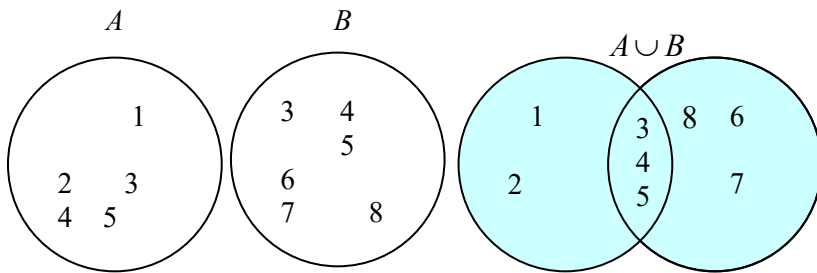
Realizar las operaciones de unión, intersección, complemento y resta de los conjuntos  $A$  y  $B$ .

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

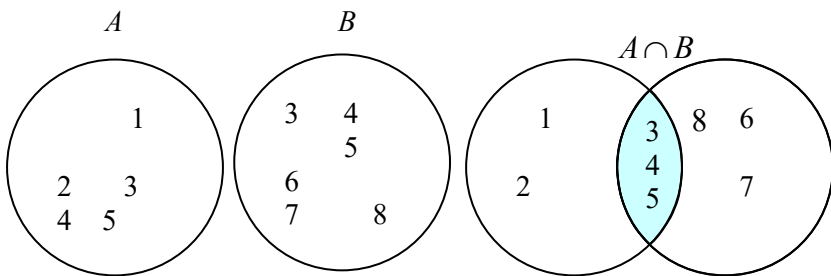
$$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Se considera la unión de los conjuntos  $A$  y  $B$  como el conjunto que contiene todos los elementos de  $A$  y  $B$ .



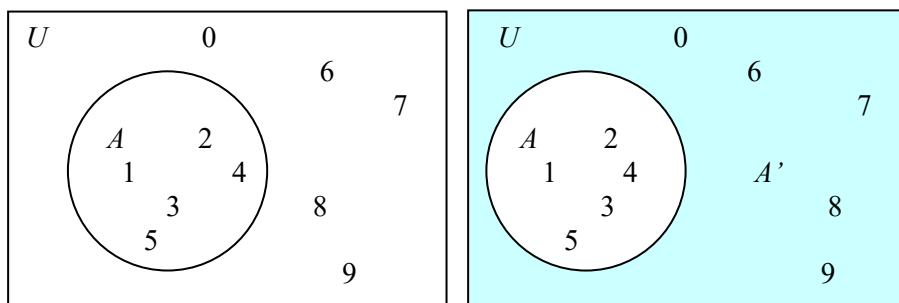
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

La intersección del conjunto  $A$  y  $B$  es el conjunto resultante que contiene los elementos en común de  $A$  y  $B$ .



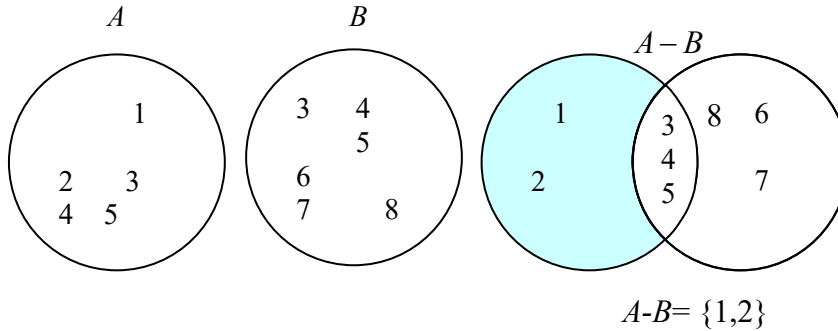
$$A \cap B = \{3, 4, 5\}$$

Se denomina complemento de  $A$  ( $A'$ ) al conjunto resultante, que contiene todos los elementos del universo, excepto los que contiene  $A$ .



$$A' = \{0, 6, 7, 8, 9\}$$

La resta del conjunto  $A$  y  $B$  es el conjunto cuyos elementos son los elementos de  $A$  que no pertenecen a  $B$ .



**Ejercicios:** Representar los diagramas de Venn de los siguientes conjuntos:  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{1, 3, 4, 5\}$ ;  $B = \{3, 4, 6, 7, 8\}$ ;  $C = \{4, 6, 8\}$

- |                        |                         |                               |
|------------------------|-------------------------|-------------------------------|
| 1. $(A \cup B)$        | 9. $C' \cap A' \cup B'$ | 17. $A' \cap A$               |
| 2. $(A \cap B)$        | 10. $A - B$             | 18. $B' \cup A'$              |
| 3. $(A \cup B) \cap C$ | 11. $A' - B'$           | 19. $(A \cup C) - (A \cap C)$ |
| 4. $(B \cap C) \cap A$ | 12. $(A \cup B') - C$   | 20. $(A - B) - (A' - B')$     |
| 5. $(A \cup C) \cap B$ | 13. $(B - A)' - C$      | 21. $(B' - A') - C'$          |
| 6. $A' \cup B$         | 14. $(C - A') - A$      | 22. $((A - C) - B)'$          |
| 7. $A \cup B'$         | 15. $(B' - C') - A$     | 23. $(A - B)' - (A - C)'$     |
| 8. $A' \cap B'$        | 16. $U' - A$            | 24. $((C' - U) \cup A)$       |

Demostrar mediante diagramas de Venn que:

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$   $A = \{1, 2, 3\}$ ;  $B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ ;  $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

- |                       |                   |                   |
|-----------------------|-------------------|-------------------|
| 25. $A \not\subset B$ | 26. $C \subset A$ | 27. $A \subset C$ |
|-----------------------|-------------------|-------------------|

Proponer cuatro conjuntos  $A, B, C, D$  de tal manera que:

28.  $A$  sea un subconjunto de  $C$ .

$C$  sea un subconjunto de  $B \cap D$ .

Proponer tres conjuntos  $A, B, C$  de tal manera que:

29.  $A$  sea subconjunto de  $B \cup C$ .

$A$  no sea subconjunto de  $C$ .

$C$  sea subconjunto de  $B$ .

Escribir en lenguaje formal que:

30. A no es subconjunto B.
31. B es un subconjunto de A intersección con D.
32. Intersección de D con la unión de A con B.

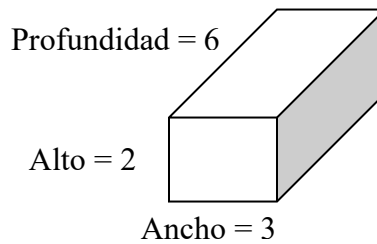
# ÁLGEBRA MATRICIAL

## VECTORES

Diversas características o cualidades de objetos no pueden ser representados únicamente por un solo número (escalar), por ejemplo, las medidas de un cubo, las cuales comprenden alto, ancho y profundidad. Pero estas diferentes medidas, se pueden formalizar mediante una fila o columna de valores que se denominan vector.

Si los datos recogidos se agrupan en  $m$  renglones y una sola columna  $m \times 1$  se dice que ésta tabla de datos es un vector columna, si, por el contrario, los datos se ordenan en una tabla de una sola fila y  $n$  columnas  $1 \times n$  se dirá que es un vector fila.

Ejemplo:



Estas medidas pueden ser representadas mediante un vector ya sea vector renglón o un vector columna

## Vector Renglón

|      |       |       |
|------|-------|-------|
| Alto | Ancho | Prof. |
|------|-------|-------|

## Vector columna

|             |
|-------------|
| Alto        |
| Ancho       |
| Profundidad |

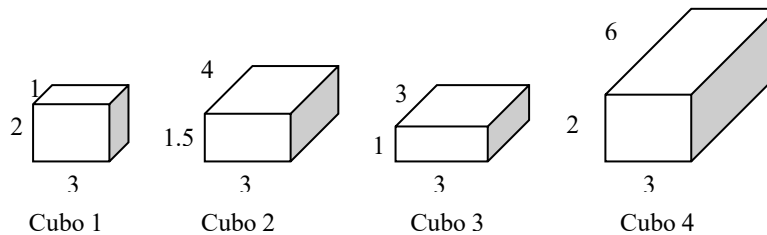
## Vector Renglón

|   |   |   |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 6 |
|---|---|---|

## Vector Columna

|   |
|---|
| 2 |
| 3 |
| 6 |

Como puede observarse, las dimensiones de un cubo son fácilmente representadas mediante un vector; pero cuando necesitamos representar dos o más cubos, necesitamos un vector para cada uno de éstos, por ejemplo:



Para cada uno de los cubos se requiere un vector ya sea renglón o columna

## Vectores Renglón

|             |
|-------------|
| Cubo 1      |
| 2   3   1   |
| Cubo 2      |
| 1.5   3   4 |
| Cubo 3      |
| 1   3   3   |
| Cubo 4      |
| 2   3   6   |

## Vectores Columna

|        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|
| Cubo 1 | Cubo 2 | Cubo 3 | Cubo 4 |
| 2      | 1.5    | 1      | 2      |
| 3      | 3      | 3      | 3      |
| 1      | 4      | 3      | 6      |



## MATRICES

Sin embargo, es posible juntar todos estos vectores en una estructura llamada matriz; una matriz es un arreglo de vectores.

Matriz generada a partir de vectores renglón

|        |     |   |   |
|--------|-----|---|---|
| Cubo 1 | 2   | 3 | 1 |
| Cubo 2 | 1.5 | 3 | 4 |
| Cubo 3 | 1   | 3 | 3 |
| Cubo 4 | 2   | 3 | 6 |

Matriz generada a partir de vectores columna

| C1 | C2  | C3 | C4 |
|----|-----|----|----|
| 2  | 1.5 | 1  | 2  |
| 3  | 3   | 3  | 3  |
| 1  | 4   | 3  | 6  |

Matriz identidad es aquella matriz que contiene unos en su diagonal principal y ceros en el resto de sus casillas

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

## OPERACIONES ENTRE MATRICES

La suma entre dos matrices se realiza sumando el valor del renglón 1 columna 1 de la primera matriz, con el valor del renglón 1 columna 1 de la segunda matriz; el valor del renglón 1 columna 2 de la primera matriz, con el valor del renglón 1 columna 2 de la segunda matriz y así sucesivamente hasta sumar todos los valores de la primera matriz con los valores de la segunda.

$$\begin{array}{ccc}
 & M_1(1,1) + M_2(1,1) & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & M_2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} & M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

La resta entre dos matrices se realiza restando el valor del renglón 1 columna 1 de la primera matriz, con el valor del renglón 1 columna 1 de la segunda matriz; el valor del renglón 1 columna 2 de la primera matriz, con el valor del renglón 1 columna 2 de la segunda matriz y así sucesivamente, hasta restar todos los valores de la primera matriz con los valores de la segunda.

$$\begin{array}{ccc}
 & M_1(1,1)-M_2(1,1) & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & M_2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} & M_1 - M_2 = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Otra de las operaciones básicas en las matrices, es la de multiplicación por un escalar y consiste en multiplicar un valor (escalar) por cada uno de los valores de la matriz.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad 3 \times M_1 = 3 \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad 3 \times M_1 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

La multiplicación entre dos matrices consiste sumar la multiplicación del valor del renglón 1 columna 1 de la primera matriz, con el valor del renglón 1 columna 1 de la segunda matriz, con la multiplicación del valor del renglón 1 columna 2 de la primera matriz, con el valor del renglón 2 columna 1 de la segunda matriz, mismo que se asigna al renglón 1 columna 1 de la matriz resultante. Y así sucesivamente con todos los renglones y columnas de la matriz.

$$M_1 \times M_2 = \begin{bmatrix} M_1(r_1, c_1) \times M_2(r_1, c_1) & M_1(r_1, c_1) \times M_2(r_1, c_2) \\ + M_1(r_1, c_2) \times M_2(r_2, c_1) & + M_1(r_1, c_2) \times M_2(r_2, c_2) \\ M_1(r_2, c_1) \times M_2(r_1, c_1) & M_1(r_2, c_1) \times M_2(r_1, c_2) \\ + M_1(r_2, c_2) \times M_2(r_2, c_1) & + M_1(r_2, c_2) \times M_2(r_2, c_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & (M_1(1,1) \times M_2(1,1)) + (M_1(1,2) \times M_2(2,1)) & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & M_2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} & M_1 \times M_2 = \begin{bmatrix} 12+16 & 10+6 \\ 18+8 & 15+3 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$M_1 \times M_2 = \begin{bmatrix} 28 & 16 \\ 16 & 18 \end{bmatrix}$$

Matriz transpuesta, es el resultado de intercambiar en una matriz los renglones por columnas y las columnas por renglones.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad M_1^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa, es el equivalente de dividir 1 sobre la matriz  $\left(\frac{1}{M1}\right)$ , y se representa como  $M_1^{-1}$  o  $M_1^{-}$

<sup>1</sup> para obtener dicha matriz se aplica el siguiente algoritmo:

Se pone la matriz que se quiere encontrar la inversa y a su lado derecho una matriz identidad del mismo tamaño

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tomaremos el primer renglón en la columna 1, el cual se considerará como semilla y lo convertiremos en 1,

$$\begin{array}{c} \nearrow \text{Semilla} \end{array} \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \div 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la semilla es dos se dividirá todo el renglón entre el valor de la semilla para convertirlo en 1

Semilla  $\rightarrow$  
$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se convierten en ceros todas las demás casillas que se encuentren en la misma columna que la semilla

Semilla  $\rightarrow$  
$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↑  
Convertir en  
ceros

Lo cual se obtiene multiplicando el renglón de la semilla por el valor a convertir y sumádoselo al renglón donde se encuentra el valor a convertir

$$\begin{array}{c} \text{Semilla} \\ \text{Valor para convertir} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Convertir en ceros la vertical

$$\begin{array}{c} x -3 \\ + \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Convertir en ceros la vertical

Se multiplica la semilla por -3 y se le suma al renglón donde se encuentra el valor a convertir

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Una vez que ya se obtuvieron todos los ceros de la columna, se continúa en forma vertical con la siguiente semilla y se repite el proceso de convertirla en uno y posteriormente convertir los demás valores de la columna en cero

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nueva semilla

$$\div -2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nueva semilla

Convertir en  
cero

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Nueva  
semilla

Convertir en  
cero

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Nueva  
semilla

Convertir en  
cero

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Nueva  
semilla

Convertir en  
cero

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 3/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Una vez que se tiene la matriz identidad en la parte izquierda el proceso ha concluido y la matriz resultante en la derecha es la matriz inversa

**Ejercicios:** Dadas las siguientes matrices; calcular:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 45 & 67 \\ 78 & 54 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 46 & 18 & 56 \\ 73 & 49 & 78 \\ 28 & 36 & 24 \end{bmatrix} \quad M_5 = \begin{bmatrix} 3a & 67a \\ 53a & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 12 & 87 \\ 67 & 49 \end{bmatrix} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 67 & 26 & 53 \\ 19 & 76 & 84 \\ 10 & 24 & 13 \end{bmatrix} \quad M_6 = \begin{bmatrix} 26b & b \\ 25b & a \end{bmatrix}$$

1.  $M_1 + M_2$
2.  $M_1 - M_2$
3.  $M_3 + M_4$
4.  $M_3 - M_4$
5.  $M_1 \times M_2$
6.  $M_4 - M_3$
7.  $(M_1 + M_2) + M_5$
8.  $(M_1 - M_2) - M_6$
9.  $M_3 - M_5 + M_4$
10.  $M_3 - (M_5 \times M_2)$
11.  $(M_1 - M_5) \times (M_2 - M_6)$
12.  $M_6 - (M_4 - M_3)$
13.  $(M_5 + M_6) + (M_2^T)$
14.  $(M_1^T - M_2) - M_6^T$
15.  $M_3'$
16.  $M_3^T + M_4'$
17.  $M_3' \times M_4$
18.  $(M_1 - M_5)'$
19.  $(M_5 - M_6) + (M_2^T)$
20.  $(M_1^T \times M_2) - M_6^T$
21.  $M_3' \times M_4$
22.  $M_3' + M_4'$
23.  $M_3' \times M_4^T$
24.  $(M_1 \times M_5)^T$

# CÁLCULO

## FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Una función  $f$  es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto  $x$  en un conjunto (**dominio**) un solo valor  $f(x)$  de un segundo conjunto, El conjunto de todos los valores obtenidos se denomina **rango** de la función.

**Ejemplo:**

Graficar la siguiente función:

$$f(x) = 3x + 1$$

$$f(-3) = 3(-3) + 1 = -8$$

$$f(-2) = 3(-2) + 1 = -5$$

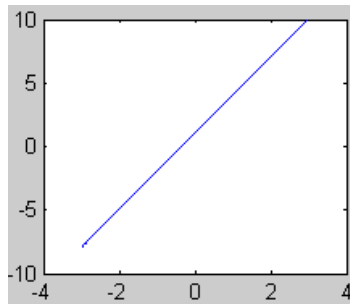
$$f(-1) = 3(-1) + 1 = -2$$

$$f(0) = 3(0) + 1 = 1$$

$$f(1) = 3(1) + 1 = 4$$

$$f(2) = 3(2) + 1 = 7$$

$$f(3) = 3(3) + 1 = 10$$



### Ejercicios

Construir la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = -2x - 5$

2.  $g(x) = \frac{1}{2}x + 6$

3.  $y = x^2 - 3$

4.  $f(x) = -x^2 + 4$

5.  $y = x^3 - 2$

6.  $y = x^4$



7.  $y = 3x^4$

8.  $f(x) = \sqrt{x}$

9.  $g(x) = \frac{1}{5}(x+3)^2 - 6$

10.  $y = \frac{x-3}{x^2+2x-15}$

11.  $w(x) = \text{Sen } x$

12.  $f(x) = \text{Cos } x$

13.  $g(x) = \text{Tan } x$

14.  $y = \text{Cot } x$

15.  $y = \text{Sec } x$

16.  $f(x) = \text{Csc } x$

17.  $y = \text{Log } x$

18.  $f(x) = \text{Ln } x$

19.  $g(x) = 2^x$

20.  $f(x) = e^x$

## CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES

### Funciones Algebraicas.

Son definidas por un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias o raíces. Entre ellas se encuentran:

- Polinomiales:  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + ax + a_0$   
donde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Racionales: La variable independiente aparece en el denominador.
- Irracionales: La variable es afectada por exponentes fraccionarios (raíces).

### Funciones Trascendentes.

No pueden ser definidas por un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias o raíces. Entre ellas se encuentran:

- Logaritmo Vulgar – Log x – (base 10)
- Logaritmo Natural – Ln x – (base e = 2.71828182)
- Exponenciales (La variable independiente aparece como exponente)
- Trigonómicas Directas (Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Secante, Cosecante)
- Trigonómicas Inversas (Arco Seno, Arco Coseno, Arco Tangente, Arco Cotangente, Arco Secante, Arco Cosecante)

## OPERACIONES CON FUNCIONES

Al igual que dos números  $a$  y  $b$  pueden sumarse para producir un nuevo número  $a + b$ , también dos funciones pueden sumarse para producir una nueva función  $f + g$ . Además de sumas, es posible realizar otras operaciones, tales como: restas, multiplicaciones, divisiones.

**Suma:**  $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$

**Resta:**  $f(x) - g(x) = (f - g)(x)$

**Multipliación:**  $[f(x)][g(x)] = (f * g)(x)$

**División:**  $\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$  ; cuando  $g(x) \neq 0$

## Ejercicios

Dadas las siguientes funciones, realizar las operaciones indicadas.

$$f(x) = 5x^3 + 3x$$

$$g(x) = 4x^2 + 6x - 5$$

$$h(x) = 3x + 12$$

$$i(x) = 11 - 8x^2 + 3x^3$$

$$j(x) = 6x^2 - 4$$

$$k(x) = 3 - x + x^2 - 5x^3$$

1.  $f(x) + g(x)$ ; para  $x = 2$

2.  $h(x) - i(x)$ ; para  $x = 3$

3.  $k(x) * g(x)$ ; para  $x = 2$

4.  $f(x) / i(x)$ ; para  $x = 1$

5.  $j(x) * j(x)$ ; para  $x = 4$

6.  $h(x) + k(x) - f(x)$ ; para  $x = 3$

7.  $\frac{f(x)}{g(x)} + j(x)$  ; para  $x = 2$

8.  $\frac{h(x)}{i(x)}[j(x)]$  ; para  $x = \frac{1}{2}$

9.  $k(x) * h(x) * f(x)$ ; para  $x = \frac{2}{3}$

10.  $g(x) - h(x) + [k(x)] \left[ j(x) + \frac{1}{f(x)} \right]$  ; para  $x = \frac{3}{4}$

## LÍMITES Y CONTINUIDAD

Se dice que una función  $f(x)$  tiene límite o tiende a un límite si existe un valor  $L$  fijo al cual se aproxima siempre que  $x$  este cada vez más cerca o tiende a un valor  $a$  fijo.

Siempre que sea posible podemos calcular el límite de una función cuando  $x \rightarrow c$  sólo sustituyendo en  $f(x)$  el valor de  $x$  por  $c$ .

### Límite en un punto.

#### a) Límite finito:

Se dice que la función  $y = f(x)$  tiene por límite  $b$  cuando  $x$  tiende hacia  $a$ , y se representa por:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

#### b) Límite infinito:

Se dice que la función  $y = f(x)$  va creciendo indefinidamente cuando  $x$  tiende hacia  $a$ , y se representa

por:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

### Propiedades de los límites.

1)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  siempre que no aparezca la indeterminación  $\infty - \infty$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  con  $\lambda \neq 0$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \bullet g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \bullet \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  siempre que no aparezca la indeterminación  $0 \bullet \infty$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} (f(x))}{\lim_{x \rightarrow a} (g(x))}$  siempre que no aparezcan las indeterminaciones  $\frac{0}{0}$  ó  $\frac{\infty}{\infty}$ .

5)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^k = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^k$  con  $k \neq 0$ , siempre y cuando tengan sentido las potencias que aparecen.

- 6)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  siempre y cuando tengan sentido las potencias que aparecen y no nos encontremos con indeterminaciones de los tipos  $\infty^0$ ,  $0^0$  ó  $1^\infty$ .

### Cálculo de Límites.

- A) Indeterminación  $\infty - \infty$ . En la mayoría de los casos, basta con efectuar las operaciones indicadas. En otros casos, sobre todo en aquellos en que aparecen radicales, basta por multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.
- B) Indeterminación  $0 \cdot \infty$ . En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.
- C) Indeterminación  $\frac{0}{0}$ . Cuando sólo aparecen funciones radicales, basta con descomponer factorialmente el numerador y el denominador. En aquellos casos en que aparecen funciones irracionales (radicales), basta con multiplicar y dividir la expresión radical conjugada.
- D) Indeterminación  $\frac{\infty}{\infty}$ . Basta con dividir el numerador y el denominador por la mayor potencia de  $x$  del denominador.
- E) Indeterminaciones  $\infty^0$ ,  $0^0$  ó  $1^\infty$ . Resolver por los métodos anteriores y/o aplicar las propiedades de los logaritmos.

### Discontinuidades.

Se dice que una función  $y = f(x)$  es discontinua en  $x = a$ , si no es continua en dicho valor de  $x$ , es decir, no cumple alguna de las tres condiciones de continuidad.

#### Tipos de Discontinuidades.

- a) Evitable. Cuando existe el  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  pero no coincide con el valor de  $f(a)$  por una de estas dos razones, son distintos los valores o no existe  $f(a)$ .

- b) De Salto. Cuando existe el límite por la derecha y por la izquierda (siendo ambos finitos) pero no coinciden.
- c) Asíntota. Cuando alguno de los límites laterales (o ambos) no es finito. Puede ser asíntota por la derecha, por la izquierda o por ambos lados.
- d) Esencial. Cuando no existe alguno de los límites laterales (o ambos). Puede serlo por la derecha, por la izquierda o por ambos lados.

### Ejercicios

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} (2x + 1)$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 3x^2 + 4x - 3} \right)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} \right)$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36} \right)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12} \right)$$

$$13. \lim_{s \rightarrow 4} \left( \frac{3s^2 - 8s - 16}{2s^2 - 4s + 4} \right)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x^2 - 4}{x + 2} \right)$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 - x - 1}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{x^2 - 9}{x - 3} \right)$$

$$15. \lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x^3 - x^2 - x - 10}{x^2 + 3x + 2} \right)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \left( \frac{4x^2 - 9}{2x + 3} \right)$$

$$16. \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{2 - \sqrt{4 - T}}{T} \right)$$

$$7. \lim_{T \rightarrow -2} \left( \frac{2 - 3T - 2T^2}{16 - 6T - T^2} \right)$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left\lfloor \frac{1}{x+1} \right\rfloor - 1}{x}$$

$$8. \lim_{y \rightarrow -2} \left( \frac{y^3 + 8}{y + 2} \right)$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 3}{4x - 5} \right)$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt[3]{\frac{5 + 2x}{5 - x}}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 1}{6 + x - 3x^2} \right)$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \right)$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x^3 + 2x^2 + 5x + 11}{1 + 2x - 4x^3} \right)$$

## METODOLOGÍA PARA DERIVAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS MEDIANTE INCREMENTOS

1. Se incrementan las variables, miembro a miembro.
2. Se restan las variables originales en ambos miembros.
3. Se simplifican a su más simple expresión y se divide entre el incremento de la variable del segundo miembro.
4. El incremento de la variable del segundo miembro tiende a cero produciéndose de esta manera la derivada.

### Ejemplo:

Derivar la expresión:  $y = 2x$

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)$$

$$y + \Delta y - y = 2(x + \Delta x) - 2x$$

$$\Delta y = 2x + 2\Delta x - 2x$$

$$\Delta y = 2\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

### Ejercicios

1.  $y = 5x^2 + 2$
2.  $y = 3x^2 + 2x + 1$
3.  $y = 2x - 7$
4.  $y = \frac{3x^2 + 7}{3x}$
5.  $y = \sqrt{2x}$
6.  $y = \frac{1}{x+1}$
7.  $y = \sqrt{x^2 + 3} - 1$
8.  $y = \frac{3x}{\sqrt{2x}}$
9.  $y = (x - 5)^{\frac{1}{3}}$
10.  $y = 22$



## DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES MEDIANTE REGLAS PRÁCTICAS

1. La derivada de una constante es igual a cero.  $D_x C = 0$
2. La derivada de una variable con respecto a sí misma es igual a la unidad.  $D_x x = 1$
3. La derivada de una variable elevada a una potencia es igual a la potencia multiplicada por la variable a la potencia -1.  $D_x U^n = nU^{n-1} \frac{du}{dx}$
4. La derivada de una cantidad multiplicada por otra es igual a la primera cantidad multiplicada por la derivada de la segunda cantidad, más la segunda cantidad multiplicada por la derivada de la primera cantidad.  $D_x UV = Udv + Vdu$
5. La derivada de una cantidad multiplicada dividida sobre otra es igual a la segunda cantidad multiplicada por la derivada de la primera cantidad, menos la primera cantidad multiplicada por la derivada de la segunda cantidad, dividido sobre la segunda cantidad al cuadrado.  

$$D_x \frac{U}{V} = \frac{Vdu - Udv}{V^2}$$

**Nota:** Para derivar funciones **trascendentes**, utilizar las fórmulas de Cálculo Diferencial localizadas en la parte final de este cuadernillo.

### Ejercicios

Derivar las siguientes funciones.

- |                                 |                                            |
|---------------------------------|--------------------------------------------|
| 1. $y = 8x^8 - 5x^2 + 2$        | 11. $g(w) = \frac{(w-1)(w-3)}{(w+1)(w+3)}$ |
| 2. $y = -3x^2 - 2x - 1$         | 12. $f(t) = (t^6 - t^{-6})^6$              |
| 3. $y = -2x + 7a + 8w$          | 13. $h(x) = \frac{k}{(3x^2 + 2)}$          |
| 4. $f(x) = \frac{3x^2 + 7}{3x}$ | 14. $y = (x^3 + 4x^2 - x - 11)^2$          |
| 5. $f(x) = \sqrt{2x}$           | 15. $k(z) = [z^2 + \sqrt{z^2 + 9}]^2$      |
| 6. $g(x) = (x+1)^{-2}$          | 16. $y = (x-1)\sqrt{x^2 + 9}$              |

$$7. y = \sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x - 1}$$

$$8. y = \frac{3x}{\sqrt{2x}}$$

$$9. y = (x - 5)^{\frac{7}{3}}$$

$$10. y = \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}$$

$$17. f(x) = \sqrt[3]{x(x^2 + 3)^2}$$

$$18. y = (3x^2 - 1)^3$$

$$29. y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-1}$$

$$20. y = (11 - x)^2 + \left(\frac{x^2 + 5x}{5x - x^2}\right)^3$$

## Ejercicios

Derivar las siguientes funciones trascendentes.

$$1. y = \ln x$$

$$2. y = \ln(3x^2 - 6)$$

$$3. y = \log(2x)$$

$$4. f(x) = \log(5x^3 + 3x^2 - 2)$$

$$5. f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log(2x^2 - 1)$$

$$6. g(x) = \ln \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}$$

$$7. y = \ln^3 \sqrt{x^2 + 3}$$

$$8. y = \frac{\log(-x^2 + 2)}{x^3}$$

$$9. y = \frac{\log(1-5x)}{7x}$$

$$10. y = \log(\ln x)$$

$$21. y = \operatorname{sen} 3x$$

$$22. y = \csc(5x^2 + 2x - 1)$$

$$23. y = \cot(-2x + 7a)$$

$$24. f(x) = \frac{\cos \sqrt{-9x}}{3x}$$

$$25. f(x) = \sec(3x^2 \cdot e^{4x})$$

$$11. g(x) = e^{5x}$$

$$12. f(x)x^2 e^{-x}$$

$$13. h(y) = b^{2y}$$

$$14. y = a^{(5x^2 - 1)}$$

$$15. k(z) = e^{\sqrt{3x-1}}$$

$$16. y = \frac{2}{e^{14x}}$$

$$17. f(x) = e^{\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}}$$

$$18. y = (3x^2 - 1)^3$$

$$19. y = 9^{x \ln x}$$

$$20. y = a^{\sqrt{x-2}} \cdot b^{\sqrt{x-3}}$$

$$31. g(w) = \cot^{-1} \sqrt{1-x^2}$$

$$32. f(t) = x \cdot \operatorname{sen}^{-1} 2x$$

$$33. h(x) = \ln(\operatorname{tg}^{-1} x^2)$$

$$34. y = \cot^{-1}(e^{5x})$$

$$35. k(x) = \csc^{-1}(10x^4) + \frac{x}{1-x^2}$$

$$26. \quad g(y) = \frac{1 + \operatorname{sen} y}{1 - \operatorname{sen} y}$$

$$36. \quad y = \sec^{-1} \sqrt[3]{x^3 + 9}$$

$$27. \quad y = \frac{e^{4x}}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

$$37. \quad f(x) \cos^{-1}(\operatorname{sen}(-x))$$

$$28. \quad y = x \cos(8x^2) + x \operatorname{sen}(4x^2)$$

$$38. \quad y = \operatorname{sen}^{-1} \frac{(3x^2 - 1)^3}{(1 - 3x^2)}$$

$$29. \quad y = \ln(\operatorname{tg}(6x + 1))$$

$$39. \quad y = \operatorname{tg}^{-1}(e^{-8x} + \ln x)$$

$$30. \quad y = \sqrt[3]{\left(\frac{\cos(2x)}{x-1}\right)^2}$$

$$40. \quad y = \left(\frac{\log(\sec^{-1})}{e^{5a}}\right)^8$$

## INTEGRALES Y MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

**Diferenciación.** Es el proceso de obtener derivadas.

**Anti-diferenciación.** Es el procedimiento mediante el cual expresiones diferenciales se integran de manera común.

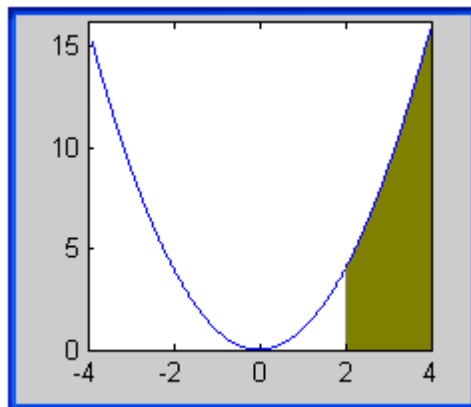
**Integración.** Es el proceso mediante el cual se obtiene el área bajo la curva de una función.

**Integrales Definidas.** Dan como resultado un valor numérico. Si en alguno de los límites existe una variable, la integral da como resultado una función.

**Integrales Indefinidas.** Dan como resultado una función.

Ejemplo:

$$\int_2^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^4 = \frac{(4)^3}{3} - \frac{(2)^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} = \text{Área bajo la curva en la función } y = x^2, \text{ desde 2 hasta 4 para el eje } x.$$



Función  $y = x^2$

**Cálculo de Integrales Indefinidas:**

- a) Integrales Directas.
- b) Por Cambios de Variable.
- c) Exponenciales.
- d) Trigonómicas.
- e) Trigonómicas Inversas.
- f) Por Partes.
- g) Por Descomposición en Fracciones Parciales Simples y Compuestas.

**Ejercicios**

**Integrar las siguientes funciones.**

- |                                                                     |                                         |
|---------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1. $\int (x^2 + 1)dx$                                               | 11. $\int x^2 \sqrt{1+x} \cdot dx$      |
| 2. $\int (x^3 - 5x^3 - 14x + a)dx$                                  | 12. $\int x \sqrt{x+2} \cdot dx$        |
| 3. $\int (8x^6 + x^4 + 5\sqrt{x} - \frac{15}{x} + \frac{b}{x^3})dx$ | 13. $\int \frac{(x+3)}{(3-x)^{2/3}} dx$ |
| 4. $\int (\sqrt{2x^2 + 4x + 1})(4x + 4)dx$                          | 14. $\int (x+1)^2 \sqrt{x+7} \cdot dx$  |
| 5. $\int (x^3 + a)^3 (x^2)dx$                                       | 15. $\int x^5 (x^3 + 3)^{1/4} dx$       |
| 6. $\int \frac{(3x^2 - 2)}{\sqrt{x}} dx$                            | 16. $\int e^{8x+1} dx$                  |
| 7. $\int (x) \cdot \sqrt[3]{x^2 - 5} \cdot dx$                      | 17. $\int \frac{e^x}{e^x + 11} dx$      |
| 8. $\int x(5 + 3x^2)^8 dx$                                          | 18. $\int 11^{4x^2} \cdot x \cdot dx$   |
| 9. $\int \frac{7x^2}{\sqrt{16x^3 - 7}} dx$                          | 19. $\int (e^x + 1)^5 e^x dx$           |
| 10. $\int \frac{(\ln x + 1)^2}{x} dx$                               | 20. $\int \frac{10^{\ln(x^2)}}{x} dx$   |
| 21. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$                                    | 31. $\int \frac{x}{x^4 + 16} dx$        |

$$22. \int x \cdot \sec^2 5x^2 dx$$

$$23. \int \frac{\cot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$24. \int \frac{2 \cdot \operatorname{sen} 3x}{1 + 3 \cos 3x} dx$$

$$25. \int \cos^5 x dx$$

$$26. \int x^2 \cot x^3 \csc x^3 dx$$

$$27. \int \cot^5 2x dx$$

$$28. \int \sec^4 x dx$$

$$29. \int e^x \operatorname{tg}^2(e^x) dx$$

$$30. \int \operatorname{sen}^4 2x dx$$

$$32. \int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 3}$$

$$33. \int \frac{(2+x)}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx$$

$$34. \int \frac{dx}{9-49x^2}$$

$$35. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-9x^6}} dt$$

$$36. \int x^5 e^{3x} dx$$

$$37. \int \operatorname{tg}^{-1} x \cdot dx$$

$$38. \int x^2 \cdot 10^{2x} dx$$

$$39. \int \operatorname{sen}^n x dx$$

$$40. \int \sec^3 x dx$$

### Ejercicios

Integrar las siguientes funciones por descomposición en fracciones parciales.

$$1. \int \frac{x^2}{x^2 + x - 6} dx$$

$$2. \int \frac{4w-11}{2w^2+7w-4} dw$$

$$3. \int \frac{5x-2}{x^2-4} dx$$

$$4. \int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} dx$$

$$5. \int \frac{9t^2-26t-5}{3t^2-5t-2} dt$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2(x+1)^2}$$

$$7. \int \frac{x^2+x+2}{x^2-1} dx$$

$$8. \int \frac{x+4}{x^3+4x} dx$$

$$9. \int \frac{7x^2}{(x^2+2)} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2(x+1)^2(x^2+9)}$$

**Ejercicios****Resolver las siguientes integrales definidas.**

$$1. \int_{-2}^2 \sqrt{5} dx$$

$$2. \int_{-5}^{10} dx$$

$$3. \int_{-1}^2 (2x^2 - 4x + 5) dx$$

$$4. \int_0^{\pi} \cos x dx$$

$$5. \int_a^b x^3 dx$$

$$6. \int_2^{-1} (2x + 1)^2 dx$$

$$7. \int_{\theta=0}^{tg^{-1} \frac{3}{2}} \int_{\rho=0}^{2 \sec \theta} \rho \cdot d\rho d\theta$$

$$8. 4 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^a \int_{z=0}^{\rho^2} \sqrt{16 - \rho^2} \rho \cdot d\rho d\theta dz$$

$$9. \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^4 \int_{z=0}^{\sqrt{16 - \rho^2}} \sqrt{16 - \rho^2} \rho \cdot z \cdot d\rho dz d\theta$$

$$10. 4 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\rho=0}^{a\sqrt{\cos \theta}} \rho \cdot d\rho d\theta$$

**EJERCICIOS PARA CALCULADORA**

1.  $5 + 6 =$

2.  $7 + 8 + 9 =$

3.  $8 - 6 - 4 =$

4.  $9 + 9 - 3 =$

5.  $8 + (9 - 6) =$

6.  $4 - (2 + (3 + 7)) =$

7.  $8 * (6 - 7) =$

8.  $3 / (2 + 15 - (2 * 3)) =$

9.  $6 / 2 + (15 - 12) + (100 / 2) =$

10.  $((6 / 5 - 2 / 6) + (3 / 2)) / (2 / 4) =$

11.  $(1 / 9 * 6 / 2 / (1 / 8)) =$

12.  $7^2 - \frac{2}{3} =$

13.  $\frac{4}{9} + \left(\frac{7}{5} * \frac{4}{3}\right) \div \left(\frac{2}{9} - \frac{7}{5}\right) =$

14.  $\sqrt{\frac{2 * 7^3}{(2 * 6 - 9)^2}} =$

15.  $\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 * (6 * (-7))}{2 * 6}} =$

16. Si  $n = 10$  entonces:  $i * \sum_{i=1}^n i^2 =$

17.  $6 * 7 \div \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 6 =$

18.  $\log 10^{15} =$



$$19. \ln \frac{15}{12} * e^{\frac{6}{4}} =$$

$$20. \text{ Si } n = 5 \text{ entonces } 3 * \sum_{i=1}^n (i+2)^2 =$$

$$21. \text{ Si } n = 6 \text{ entonces } \prod_{i=1}^n \frac{1}{i} =$$

$$22. 7! + 16 * (3 + 5 * 2)^{2-1} =$$

$$23. |12.15 * 10^{-3} - 18| =$$

$$24. 6 + 7 * \frac{4}{5} - \left( 5 * \frac{2}{7} \right) =$$

$$25. \frac{8 + \frac{2}{5} - \frac{7}{10} - 2}{5!} =$$

$$26. 17 \times 10 + 15 \times 10^{-3} =$$

$$27. 9 \times 10^9 * \frac{3 \times 10^2 * 4.7 \times 10^{-2}}{123^2} =$$

$$28. 13^2 * 5 + \left( 12 * 6 - \frac{1}{2} * 13 * 6 \right) / 2 =$$

$$29. \cos(2\pi) + \sin(2\pi) =$$

$$30. \operatorname{tg}(1) * \left( \frac{1}{\operatorname{tg}(1)} \right) =$$

$$31. \operatorname{ctg}(2.14) * \csc(31.17) =$$

$$32. \sec(3.14) * \csc(3.14) =$$

$$33. \sin^{-1}(4.1415) =$$

$$34. \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) =$$

$$35. \sqrt{(3-2)^2 + (4-(-3))^2 + \left(\frac{1}{2} - (-1)\right)^2} =$$

$$36. \frac{-9 + \sqrt{9^2 - 4 * (1 * 4)}}{2 * 1} =$$

$$37. \frac{e^3 - \operatorname{sen}(3)}{e^3 + \cos(3)} =$$

$$38. 104 * 5 \sqrt[5]{\left(\frac{16x10^2}{3}\right) / 2 + (3 * 6^2)}^{1/2} =$$

$$39. 15\% \text{ de } 2430$$

$$40. 17\% \text{ de } 456$$

$$41. 25\% \text{ de } 324$$

$$42. \operatorname{sen}(2 * \pi) + \cos\left(\frac{3 * \pi}{2}\right) - \csc\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sec(1) - \operatorname{tg}(\pi) + \cot(0) =$$

$$43. \frac{9 * \left(-3 / \left(7 - \left(5 * 6 * \left(7 / \sqrt{2 + 5^2 + (6/2)}\right) - 4 + 7\right) * 5^{2/3}\right)\right)}{6 - \left(2 / 4 + 7 * \left(-2^3 + 6 * \left(7 + 4 / (7 - 2 * 4 + (2 - 7)^2)\right)\right)\right)} =$$

$$44. 3 + 15 * 7 + \frac{1}{2} * 3 * 7^2 =$$

$$45. e^{\left(2 - \frac{7}{2} + 3^2\right)^2} =$$

$$46. (2 + (-3^2)) (5 + (-6) + \sqrt{9}) ((5 + (-2))^2 + 3) + (6 + 3) - (3 - 4) =$$

$$47. \left( \frac{2^2}{3^2} (2(-3)^{1/2}) + \frac{(4-3)^2}{3^2} \left( 6 - \left( \frac{3}{2} \right)^2 \right) + \frac{6^{3*2/4}}{3^2} (7-10)^2 \right) =$$

$$48. \operatorname{sen}^{-1} \left( 2^{3/4} + \operatorname{sen} \left( \frac{2-5}{3} \right) \right) =$$

$$49. \frac{6 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-4}} * \frac{16 \times 10^{-3} * 14.5 \times 10^{-4}}{14.5 \times 10^{-3}} * 14.3 \times 10^{-5} =$$

$$50. \frac{17 \times 10^2}{15 \times 10^{-1}} * \sum_{i=0}^6 \frac{2^i}{i^2} * i =$$

$$51. \frac{1252 \times 10^{-7}}{1423 \times 10^{-5}} * \frac{12.1516 \times 10^{-3}}{14.72^2} * \frac{17.2}{3 * (16 \times 10^{-2})^2} =$$

$$52. \frac{12 \times 10^{-3} * 13.15 \times 10^{-4} * 14.16}{6 \times 10^{-6} * 17.12^{2+1}} * \frac{12.17 \times 10^{-5} * 14.16}{3 * (\sqrt{6 \times 10^{-6}})^3} =$$

$$53. \frac{12 \times 10^{-3} * 13.15 \times 10^{-4} * 14.16}{3 * (6 \times 10^{-6}) * 17.12^{2+1}} * (3 * 17.12^{4-1} * (-14.16^2)) =$$

$$54. \frac{16.7 \times 10^{-7}}{2 * 6 \times 10^{-6}} * \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 \frac{i * j}{2^{i+j}} + \frac{1}{2} * \sum_{i=1}^4 i =$$

$$55. \frac{4 * \pi * 6 \times 10^{-6} * 12.3 \times 10^{3/2} * 12.13 * 15.16}{15.16 - 12.13} =$$

$$56. \frac{2 * \pi * 6 \times 10^{-6} * 32.1516 \times 10^2}{(12.3 \times 10^{3/2} - 12.13) * (15.16 / 12.13)} =$$

$$57. \frac{-23 \times 10^3 * 15.7}{2 * (17.13 \times 10^2)^3} * (3 * (17.13 \times 10^2)^3 - 12.153^2) =$$

$$58. 23 \times 10^{-23} * \frac{1}{17.2 \times 10^{2^2}} - 115.2 * \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{17.2^2} \right) =$$

$$59. 15 - \frac{(12.3 \times 10^{-3})^2}{4 * \pi^2 * 13.4 * e^2} * 15^2 =$$

$$60. (12 \times 10^2 - 12.516 \times 10^2) - \frac{12.3 \times 10^{-3}}{13.4 * \log(15.3)} * \left| \cos((-13.4)^3) \right| =$$