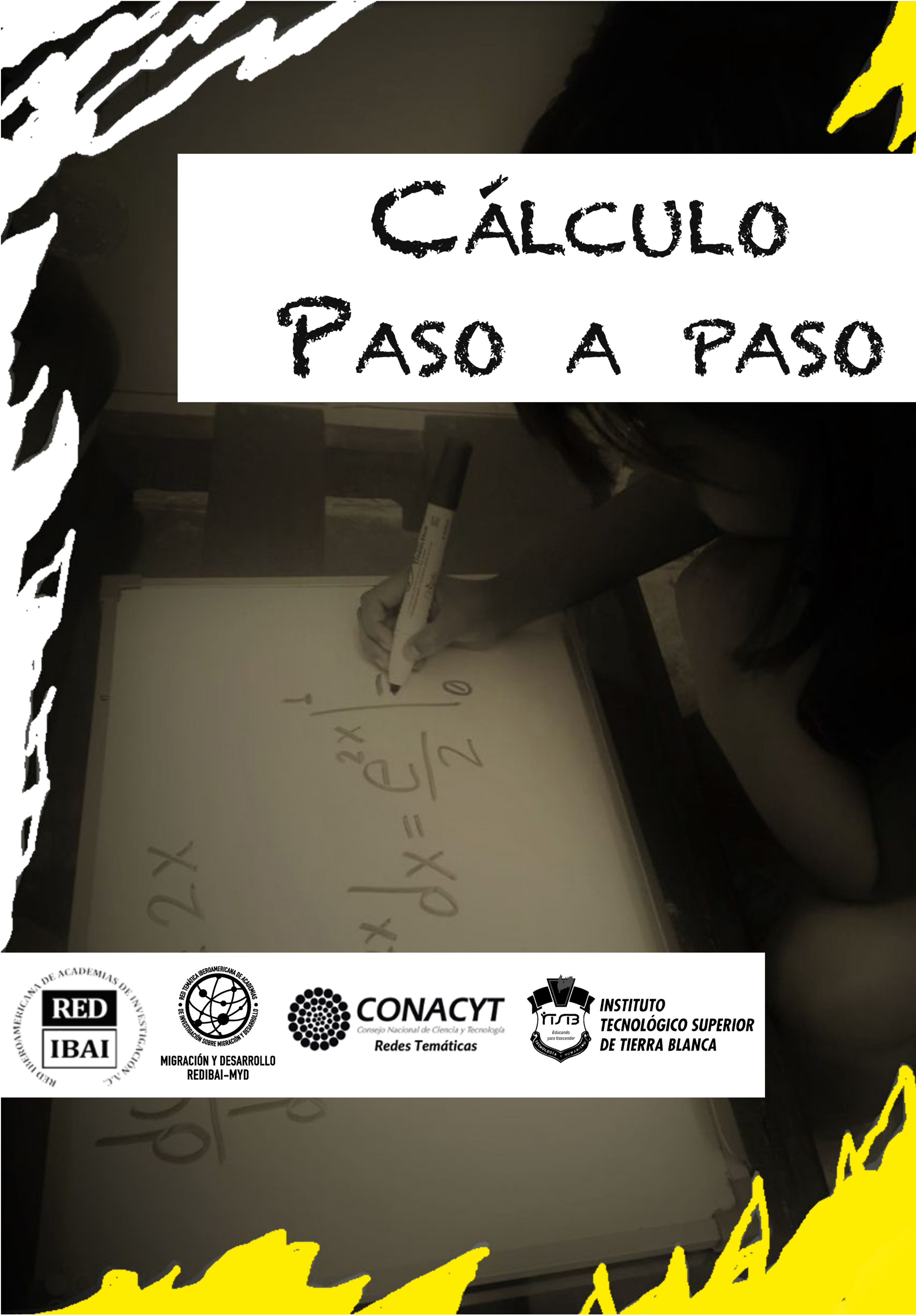
Cálculo Paso a paso



RED IBAI

MIGRACIÓN Y DESARROLLO
REDIBAI-MYD

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología
Redes Temáticas

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE TIERRA BLANCA

Cálculo

paso a paso

AUTORES
ME. JUAN CARLOS RAYMUNDO VILLARREAL
ME. HÉCTOR MURILLO MARTÍNEZ
MIA. ARLENY LOBOS PÉREZ

COORDINADOR
DR. DANIEL ARMANDO OLIVERA GÓMEZ

EDITORIAL
©RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C. 2021

EDITA: RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C
DUBLÍN 34, FRACCIONAMIENTO MONTE MAGNO
C.P. 91190. XALAPA, VERACRUZ, MÉXICO.
CEL 2282386072
PONCIANO ARRIAGA 15, DESPACHO 101.
COLONIA TABACALERA
DELEGACIÓN CUAUHTÉMOC
C.P. 06030. MÉXICO, D.F. TEL. (55) 55660965
www.redibai.org
redibai@hotmail.com

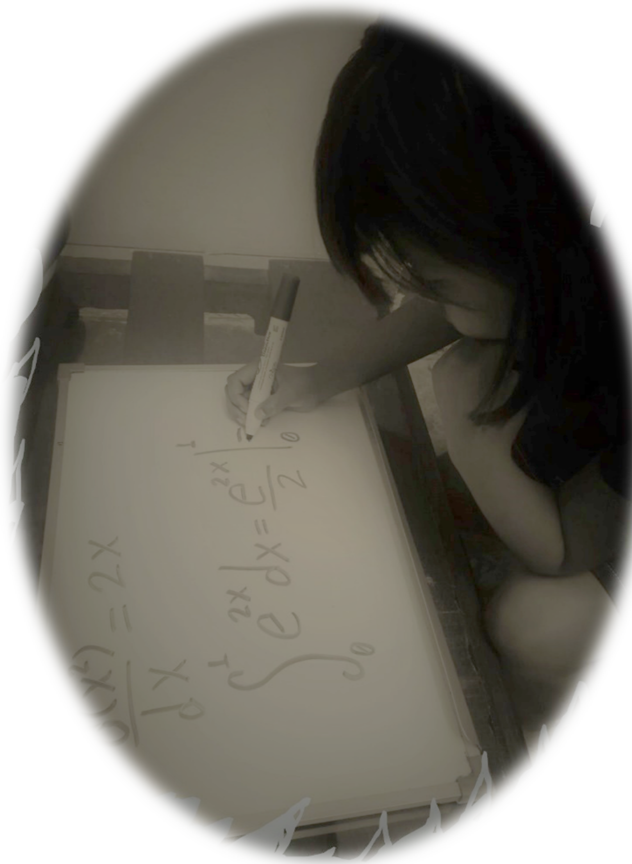
ISBN: 978-607-99595-2-4

9 786079 959524

Sello editorial: Red Iberoamericana de Academias de Investigación, A.C. (978-607-99621)
Primera Edición, Xalapa, Veracruz, México.
No. de ejemplares: 2
Presentación en medio electrónico digital: Descargable
PDF 5.5 MB
Fecha de aparición 09/12/2021
ISBN 978-607-99595-2-4

Cálculo

paso a paso



Autores
ME. Juan Carlos Raymundo Villarreal
ME. Héctor Murillo Martínez
MIA. Arleny Lobos Pérez

Instituto Tecnológico Superior de Tierra Blanca
Tecnologico Nacional de México
1er.mundo.de.ray@gmail.com

Tierra Blanca, Veracruz. Octubre de 2021

INDICE

INTRODUCCIÓN

Hoy en día el uso de matemáticas está presente en la mayoría de los ambientes en el que el ser humano se desarrolla. Para la gran mayoría de los estudiantes es una herramienta necesaria que deben aprender y más aún comprender, para poder manejar diversos temas de ingeniería. Esta obra pretende presentar una de las herramientas de el cálculo de una forma sencilla, clara y práctica, de tal forma que el lector sea capaz de entender otros libros de esta misma índole, y le ayude a comprender los fundamentos de los conceptos básicos del cálculo.

Para esto, daremos paso a explicar conceptos básicos sobre calculo diferencial e integral sin mucho tecnicismo. Además de ejercicios resueltos a detalle, de manera que el lector pueda observar cada paso de la solución de los diferentes problemas, de una forma ordenada y pequeñas explicaciones donde pueda existir alguna confusión, por tal motivo te recomendamos atender las notas que están en todo el libro encerradas o con letras mayúscula (NOTA).

Dicen que *la mano tiene memoria*, por lo que te recomiendo que, al analizar cada ejercicio, puedas transcribirlo y razonarlo para tener un mejor aprendizaje de los temas que te interesan, que espero que sean, si no todos, por lo menos la mayoría.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primero a Dios porque reconozco que de él viene la sabiduría y el conocimiento de lo que existe y de lo que aún no se descubre. A mi amada esposa **R**ocio por todo el apoyo brindado, paciencia y ánimos para seguir adelante, a mi hijo Oscar **A**lejandro y a mi pequeña **B**risa, por el tiempo que me otorgaron para terminar este trabajo. A mis amigos y colaboradores de trabajo Hector, Arleny, Viridiana y Elizabeth por el apoyo incondicional, su esfuerzo y dedicación para avanzar en este proyecto. A todos ustedes que leen estas líneas, porque sin duda se tomaron el tiempo de hojear este libro con el deseo de aprender un poco más de el y son la causa de esta obra. Quiero agradecer la valiosa colaboración de mis alumnos: Pedro B. R., Uziel A. A., Jose Carlos G. C., Rafael V. G., Reynaldo S. C., Jennyfer C. C., Joanna Monserrat R. H., Melissa H. A. y María Fernanda V. B. agradezco también a la Maestra Elizabeth Henández Méndez por el apoyo en revisión y al Maestro Juan René G. R.

ME. Juan Carlos Raymundo Villarreal.
Líder de cuerpo académico:
Energías Renovables, profesor de asignatura en Ingeniería en Mecatrónica en el ITSTB.

El que anda en justicia y habla con sinceridad, el que rehúsa la ganancia injusta, y sacude sus manos para que no retengan corrupción…, y cierra los ojos para no ver el mal;
ése vivirá en las alturas, en la roca inexpugnable estará su refugio...
Profeta Isaías

CAPÍTULO 1. LÍMITES

1.1 CONCEPTOS BÁSICOS

En este capítulo nos adentraremos al estudio de límites, concepto, reglas y procedimientos algebraicos para la solución o la determinación de la existencia o no existencia del límite de una función.

Pero antes de iniciar vamos a recordar algunos conceptos básicos y útiles que nos servirán en el transcurso de los siguientes temas.

Variable: es un elemento matemático sujeto a cambios frecuentes dentro de un conjunto de números. De forma *convencional* se tomará a "x" como variable independiente y a "y" como variable dependiente, de tal forma que los valores que tome "y" siempre van a depender de los valores que tome "x"

Por ejemplo: Tu promedio en matemáticas (y), depende de las horas de estudio (x).

La notación matemática conveniente sería la siguiente:

$$y = f(x)$$

Conjunto: Es la agrupación de objetos que tienen una característica común, cada objeto se llama miembro o elemento.

Por ejemplo: Sea el sistema planetario, el conjunto, cada planeta es un elemento.

Función: En general, una función de una variable real es una correspondencia entre dos conjuntos de números reales, de tal forma que corresponde a cada "x" perteneciente a todos los números reales (**R**) un único valor:

$$f(x) \in \boldsymbol{R}$$

Por ejemplo:

Si $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{4,10,16\}$ y su **correspondencia** es del triple más uno. Ver *figura 1*.

Es decir: $y = f(x)$

$$f(x) = 3x + 1$$

Se lee, función de *x* que pertenece a los números reales

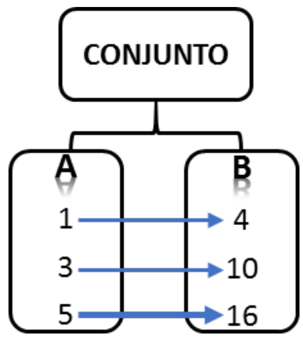


Figura 1. Correspondencia en conjuntos

Teniendo una función $f: A \to B$ se define de la siguiente manera:

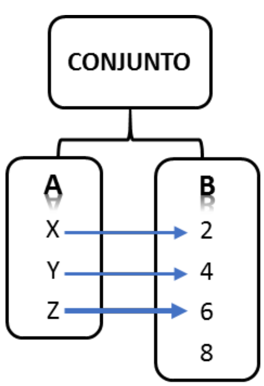
Al conjunto A se le llama conjunto de partida o dominio, se puede escribir como D_f.

Al conjunto B se llama conjunto de llegada o codominio.

Los elementos del conjunto de partida o dominio, se llaman preimágenes.

Por criterio de función, a los elementos del conjunto de llegada se les llama imágenes siempre que estén asociados a una preimagen.

Al conjunto formado por las imágenes, se les llama rango (R_f) o ámbito (A_f). En la *figura 2* se muestran dos conjuntos y sus respectivos elementos.



$D_f = \{X, Y, Z\}$
$Codominio = \{2,4,6,8\}$
$R_f = \{2,4,6\}$

Figura 2. Dominio, codominio y rango

Con el recordatorio anterior procederemos a definir que es el límite de una función, un tanto informal para poder comprender lo mejor posible el concepto.

<u>Límite de una función</u>: Es que tan cercano está un valor de un determinado punto, esto quiere decir, cuando "x" tiende a llegar lo más cerca posible a "x_0", la función $f(x)$ se le asignarán valores muy próximos a L. Por lo cual, decimos que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Considerando el concepto anterior podemos revisar un ejemplo clásico: supongamos que tenemos un resorte colgando de un extremo a una barra y en el otro extremo una masa de peso *"p"*, conociendo que el resorte se romperá si la masa es igual o mayor a 10Kg, podemos aproximar la longitud total del alambre "L" del resorte, variando el peso hasta casi llegar al máximo, observar la *figura 3*.

Entonces cuando "p" tiende a 10Kg, l tiende a L.

Dónde: L es la longitud máxima del alambre del resorte.

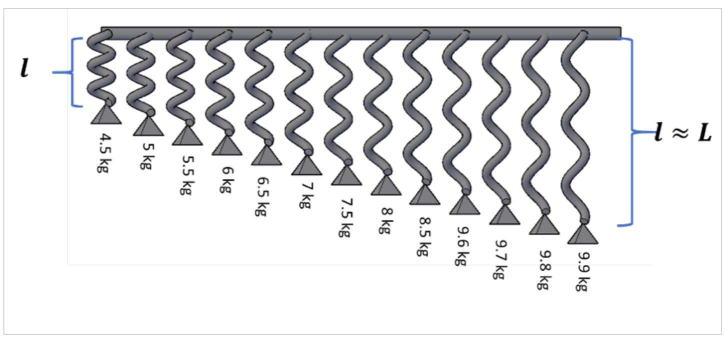


Figura 3. Estiramiento mecánico de un resorte

Por lo cual, podemos concluir con la siguiente notación de límite:

$$\lim_{p \to 10} l = L$$

1.2 Límites laterales

Si la función $f(x) = 2x^2$

Primero consideramos realizar una secuencia de valores de "x" que se aproxima a *2* por la izquierda y por la derecha, para poder observar las imágenes (codominio) a las que estarán asociados, como lo muestra la *figura 4*, en la *figura 5* se muestran las tablas con los acercamientos por la izquierda y la derecha.

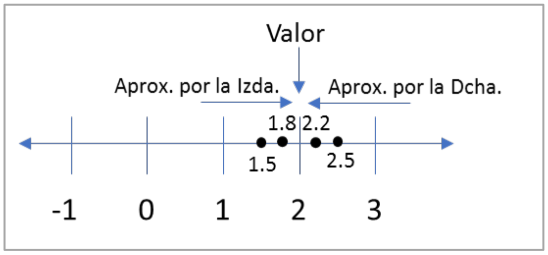


Figura 4. Acercamientos por la izquierda y derecha.

Aproximación por la izquierda	
x	$f(x)$
1.8	6.48
1.85	6.845
1.9	7.22
1.95	7.605
1.99	7.9202
1.999	7.992002

Aproximación por la derecha	
x	$f(x)$
2.2	9.68
2.15	9.245
2.1	8.82
2.05	8.405
2.01	8.0802
2.001	8.008

Figura 5. Tablas de valores del codominio.

Como se puede observar, las imágenes (codominio) se aproximan a 8, cuando x se aproxima a 2. En consecuencia, podemos decir, que el límite es:

Por la izquierda

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 8$$

Por la derecha

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 8$$

Concepto de límites laterales

Límite lateral por la izquierda: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = P$, cuando "$x$" se aproxima a x_0 con valores menores a dicho valor, El resultado se aprooxima al número P

Límite lateral por la derecha: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = Q$, cuando "$x$" se aproxima a x_0 con valores mayores a dicho valor, el aproxima al numero Q.

Por lo tanto decimos que, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, si existen sus dos límites laterales y además coinciden.

Se lee, x que tiende a tres

Por ejemplo:

a) Obtener los límites laterales de $f(x) = 3x - 2$ con $x \to 3$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 3x - 2$$

x	2.8	2.85	2.9	2.95	2.99	2.999
$f(x)$	6.4	6.55	6.7	6.85	6.97	6.997

Obtenemos que $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 7$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 3x - 2$$

	3.2	3.15	3.1	3.05	3.01	3.001
$f(x)$	7.6	7.45	7.3	7.15	7.03	7.003

Obtenemos que $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 7$

En ambos casos, la tendencia del límite es hacia el *"7"*

b) Obtener los límites laterales de $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ con $x \to 1$

NOTA: Si sustituimos el "1" directamente en la función, tendremos la indeterminación $\frac{0}{0} = indeterminado$, por consiguiente, para calcular el límite se debe realizar una aproximación lateral, por la izquierda o la derecha o bien aplicar algún método algebraico.

Límite por la izquierda de la función: $\lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$

x	0.5	0.6	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
$f(x)$	2	2.2	2.6	2.8	2.9	2.96	2.98	2.998

Entonces

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$$

Por la derecha

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$

x	1.5	1.4	1.2	1.1	1.05	1.02	1.01	1.001
$f(x)$	4	3.8	3.4	3.2	3.1	3.04	3.02	3.002

Entonces

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$$

Para comprobar el límite anterior podemos aplicar algún método algebraico, como factorización en cociente de polinomios (se explicará más adelante).

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x-1}=\frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)}=2x+1=2(1)+1=3$$

Podemos concluir que el límite existe.

c) Calcular el límite de la función $f(x)=\frac{|x|}{x}$, con $x\to 0$, por la izquierda y por la derecha.

Al evaluar la función con $x=0$, observamos que no está definida, pero podemos realizar una aproximación por la derecha y por la izquierda para saber hacia a donde se acerca.

Por la izquierda

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

x	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001
$f(x)$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Por consiguiente

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$

Por la derecha

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

x	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x)$	1	1	1	1	1	1	1	1

Por consiguiente

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$

Se puede observar que, cuando nos aproximamos a *cero* por la izquierda el límite tiende a $-\mathbf{1}$ y por la derecha el límite tiende a $\mathbf{1}$, un valor distinto, entonces concluimos que, el límite **no existe**. Podemos ver su comportamiento en la gráfica de la *figura 6*.

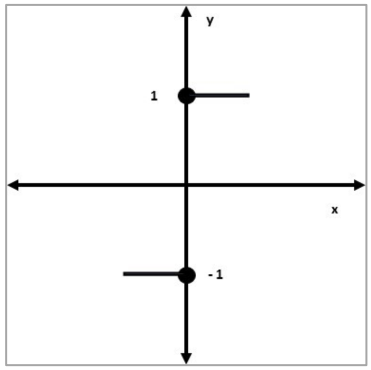


Figura 6. Gráfico de la función.

1.3 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

En esta sección se proporcionan una lista de propiedades que se pueden aplicar en la resolución de límites.

a) Límite de una constante

$$\lim_{x\to x_0} k = k \qquad (1.a)$$

b) Límite de una suma o resta

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) \qquad (1.b)$$

c) Límite de un producto de funciones

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) * g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) * \lim_{x\to x_0} g(x) \qquad (1.c)$$

d) Límite de dirección de funciones

$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \qquad (1.d)$$

Si $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

e) Límite de una potencia

$$\lim_{x\to x_0} \left[f(x)^{g(x)}\right] = \lim_{x\to x_0} (f(x))^{\lim_{x\to x_0} g(x)} \qquad \text{Si } f(x) > 0 \qquad (1.e)$$

f) Límite de una función con factor constante:

$$\lim_{x\to x_0} k[f(x)] = k \lim_{x\to x_0} f(x) \qquad (1.f)$$

Donde “k” es cualquier número real constante.

g) Límite de una raíz.

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)} \qquad (1.g)$$

Si *"n"* es par $f(x) \geq 0$

h) Límite de un logaritmo

$$\lim_{x \to x_0} [\log a\, f(x)] = \log a\, [\lim_{x \to x_0} f(x)] \qquad (1.h)$$

Si $a > 0$ y $f(x) > 0$

1.4 CÁLCULO DE LÍMITES

Límites directos

A estos límites se les llama directos, porque sólo basta con aplicar las propiedades básicas y realizar la sustitución y de esta forma obtener el resultado.

a) Calcular $\lim_{x \to 1} 4$

$\lim_{x \to 1} 4 = 4$ *Aplicar propiedad (1.a)*

b) Calcular $\lim_{x \to 2} 4x$

Una vez que se aplican todas las propiedades necesarias, se procede a sustituir el límite en "x"

$\lim_{x \to 2} 4 = 4 \lim_{x \to 2} x = 4(2) = 8$ *Aplicar propiedad (1.f)*

c) Calcular $\lim_{x \to 2} x^4$

$\lim_{x \to 2} x^4 = (\lim_{x \to 2} x)^4 = (2)^4 = 16$ *Aplicar propiedad (1.e)*

d) Calcular $\lim_{x \to -1} (2x^2 + x - 3)$

$$\lim_{x \to -1} (2x^2 + x - 3) = \lim_{x \to -1} 2x^2 + \lim_{x \to -1} x - \lim_{x \to -1} 3$$

Aplicar propiedad (1.b), (1.f)

$$2 \lim_{x \to -1} x^2 + \lim_{x \to -1} x + \lim_{x \to -1} 3 = 2\,(\lim_{x \to -1} \mathrm{x})^2 + \lim_{x \to -1} x - \lim_{x \to -1} 3$$

$$2(-1)^2 + (-1) - (3) = 2(1) - 1 - 3 = -2$$

e) Calcular $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{2x+5}{3x-1}}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x+5}}{3x-1} = \frac{\lim_{x \to 2} \sqrt{2x+5}}{\lim_{x \to 2} (3x-1)} = \frac{\sqrt{2 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 5}}{3 \lim_{x \to 2} \mathrm{x} - \lim_{x \to 2} 1}$$ *Aplicar propiedad (1.d), (1.g)*

$$\frac{\sqrt{2(2)+5}}{3(2)-1} = \frac{\sqrt{9}}{5} = \frac{3}{5}$$

f) Calcular $\lim_{x \to 3} \sqrt{x+1}$

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \to 3}(x+1)} = \sqrt{\lim_{x \to 3}(x) + \lim_{x \to 3} 1} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

En este apartado se han realizado algunos ejemplos aplicando las propiedades de los límites, aunque es correcto mencionar, que sí, el lector comprende adecuadamente las propiedades, las puede realizar de forma directa, siempre que el límite no quede en una indeterminación $\frac{0}{0}$ ó $\frac{c}{0}$ (cero sobre cero o constante sobre cero)

1.5 Indeterminación en cociente de polinomios

En caso de tener una indeterminación en un cociente de polinomios, se factorizan numerador y/o denominador para poder *"eliminar"* (simplificar la fracción dividiendo) los factores comunes y aplicar el límite de forma directa.

Por ejemplo:

a) Calcular $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

Observa que si se sustituye el "3" de forma directa "$x-3$" provoca una indeterminación, por consiguiente, se debe buscar que: $x - 3 \neq 0$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)+(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x \to 3}(x+3) = 3+3 = 6$$

Para poder quitar la indeterminación que provoca el cero en el denominador, es necesario factorizar, en este caso, el numerador: $x^2 - 9 = (x-3) + (x+3)$, de esta forma se puede realizar una división de $\frac{(x-3)}{(x-3)} = 1$.

En ejemplos siguientes se debe de observar la parte que provoque la indeterminación.

b) Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$

Se factoriza $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x+2) = 1+2 = 3$$

c) Calcular $\lim_{x \to -3} \frac{x^2+x-6}{x+3}$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2+x-6}{x+3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)} = \lim_{x \to -3}(x-2) = -3-2 = -5$$

d) Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

NOTA: Para factorizar x^3-1, puedes aplicar el método de Ruffini, diferencia de cubos, división por galera o algún otro método conocido.

Diferencia de cubos: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Por lo cual: $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=(1)^2+1+1=3$$

e) Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^3-x^2-6x+8}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^3-x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x^2+x-4)}$$

Se factoriza numerador y denominador

$$\lim_{x\to 2}\frac{2}{x^2+x-4}=\frac{2}{(2)^2+2-4}=\frac{2}{2}=1$$

1.6 Forma indeterminada en una fracción con radicales

Para simplificar la indeterminación constante sobre cero en un cociente con radicales en el numerador y/o denominador, se racionaliza la parte irracional, aplicando su conjugado, de esta forma se simplifica la función y se resuelve el límite, ya sea aplicando factorización o directamente.

a) Calcular $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

Racionalizar el numerador, aplicando el conjugado de la parte irracional.

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}\right)$$

NOTA: Observa que $\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ no altera el límite original, debido a que es igual a la unidad. Lo siguiente será multiplicar las dos fracciones.

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$$

Racionalizar el numerador y denominador, aplicando doble conjugado de las partes irracionales.

b) Calcular $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{3x+1}-7}$

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{3x+1}-7}=\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{3x+1}-7}\left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}\right)\left(\frac{\sqrt{3x+1}+7}{\sqrt{3x+1}+7}\right)$$

$$\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)(\sqrt{3x+1}+7)}{(3x+1-49)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)(\sqrt{3x+1}+7)}{3(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{(\sqrt{3x+1}+7)}{3(\sqrt{x}+4)}=\frac{(\sqrt{3(16)+1}+7)}{3(\sqrt{(16)}+4)}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

NOTA: Simplificar y factorizar $(3x+1-49)=(3x-48)=3(x-16)$

c) Calcular $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x^2-a^2}$

Aplicar diferencia de cuadrados.
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x^2-a^2}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right)=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x^2-a^2)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{(a+a)(\sqrt{a}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2a(2\sqrt{a})}=\frac{1}{4a\sqrt{a}}=\frac{1}{4a^{3/2}}=\frac{1}{4\sqrt{a^3}}$$

d) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{4}}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{4}}{x}\left(\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{4}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{4}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{0+4}+\sqrt{4}}=\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\frac{1}{2\sqrt{4}}$$

e) Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{2x-4}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{2x-4}\left(\frac{\sqrt{4x+1}+3}{\sqrt{4x+1}+3}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{4x+1-9}{(2x-4)(\sqrt{4x+1}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{4x-8}{(2x-4)(\sqrt{4x+1}+3)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2(x-4)}{(2x-4)(\sqrt{4x+1}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(\sqrt{4x+1}+3)}=\frac{2}{(\sqrt{4(2)+1}+3)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

f) Calcular $\lim_{x\to 27}\frac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27}$

NOTA: Aplicar diferencia de cubos para poder racionalizar. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, en este caso se asignará: $a=\sqrt[3]{x}$ y $b=3$, esto para cubrir el primer paréntesis de la diferencia de cubos.

$(a-b)$ (a^2+ab+b^2) $=$ a^3-b^3

$$\lim_{x\to 27}\frac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27}\left(\frac{(\sqrt[3]{x})^2+3(\sqrt[3]{x})+(3)^2}{(\sqrt[3]{x})^2+3(\sqrt[3]{x})+(3)^2}\right)=\lim_{x\to 27}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-(3)^3}{(x-27)((\sqrt[3]{x})^2+3(\sqrt[3]{x})+(3)^2)}$$

$$\lim_{x\to 27}\frac{x-27}{(x-27)((\sqrt[3]{x})^2+3(\sqrt[3]{x})+(3)^2)}=\lim_{x\to 27}\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2+3(\sqrt[3]{x})+(3)^2}=\frac{1}{(\sqrt[3]{27})^2+3(\sqrt[3]{27})+(3)^2}$$

$$=\frac{1}{9+9+9}=\frac{1}{27}$$

1.7 SOLUCIÓN DE LÍMITES POR EL MÉTODO DE CAMBIO DE VARIABLE

Para poder reducir una forma irracional, también se puede introducir una nueva variable, esto con el propósito de evitar los radicales en la fracción.

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, donde $x-1\neq 0$

NOTA: En este caso se puede introducir una variable divisible entre "2" para reducir la raíz cuadrada. Por esta razón se propone cambiar a $x=y^2$, como $x\to 1$, se tiene $y^2\to 1$, entonces $y\to\sqrt{1}$. Realizando el cambio de variable, el límite quedaría de la siguiente forma:

$$\lim_{y\to 1}\frac{\sqrt{y^2}-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{1}{(y+1)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Para comprobar el resultado y la eficacia del método, se resolverá el mismo ejemplo por el método de la sección

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+8}\ -2\sqrt[6]{x+8}}{\sqrt[3]{x+8}-2}$

Para este caso, se toma $(x+8)=y^6$, como $x\to 0$, entonces, $y^6=0+8=8$, por lo tanto, $y\to\sqrt[6]{8}$.

$$\lim_{y\to\sqrt[6]{8}}\frac{\sqrt{y^6}-2\sqrt[6]{y^6}}{\sqrt[3]{y^6}-2}=\lim_{y\to\sqrt[6]{8}}\frac{y^3-2y}{y^2-2}=\lim_{y\to\sqrt[6]{8}}\frac{(y-\sqrt{2})(y^2+\sqrt{2}\,y)}{(y-\sqrt{2})(y+\sqrt{2})}=\lim_{y\to\sqrt[6]{8}}\frac{y^2+\sqrt{2}\,y}{y+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(\sqrt[6]{8})^2+\sqrt{2}\,\sqrt[6]{8}}{\sqrt[6]{8}+\sqrt{2}}=\frac{2+2}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Todas las cosas por Él fueron hechas;
y sin Él nada de lo que es hecho, existiría…
Apóstol Juan

CAPÍTULO 2. DERIVADAS, CONCEPTOS BÁSICOS

2.1 CONCEPTO

Siendo el cálculo, en general un magnífico invento de los matemáticos Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, claro, considerando que ellos fueron los que le dieron una mejor forma a todos los estudios que otros ya habían elaborado, como Torricelli, Kepler y muchos más; procederemos a realizar una definición sencilla del concepto que estos matemáticos han creado.

Derivada: es la inclinación que se puede encontrar en una curva cualquiera en un punto dado.

Dicho de otra forma…

Si marcamos un punto (le llamaremos P) en algún lugar de la curva, se puede calcular su derivada, calculando la inclinación (ángulo) que tiene la tangente que toca al punto P (sólo un punto) de la curva, como lo ilustra la *figura 7*.

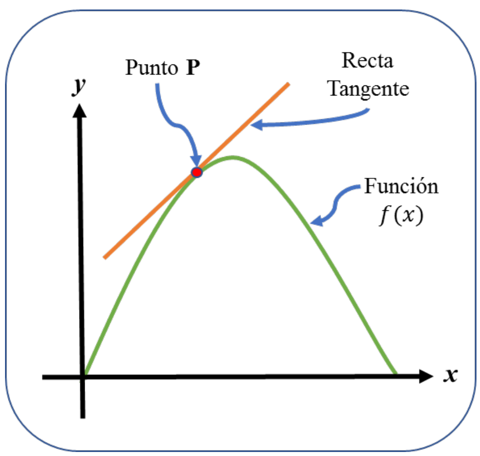


Figura 7. Representación de la Derivada

Esto quiere decir que, la derivada nos muestra el cambio de inclinación a lo largo del trayecto (curva) en relación con la horizontal. Así, físicamente la derivada es una razón de cambio de forma “instantánea”, cabe mencionar que el término “instantáneo” es solo un valor teórico, que en muchas ocasiones es necesario analizar.

De este análisis podemos deducir cuatro tipos de pendientes:

1) Pendiente positiva: en esta, el plano es ascendente, a medida que avanza hacia la derecha.
2) Pendiente negativa: en esta, el plano es descendente, a medida que avanza hacia la izquierda y su valor es negativo.
3) Pendiente nula: en esta, el tramo plano esta de forma horizontal, paralela al eje *"x"*, entonces no hay pendiente.
4) Pendiente infinita: en esta, el plano está de forma vertical, paralela al eje *"y"*, entonces no hay pendiente.

Traduciendo esto a un lenguaje matemático tenemos que: la curva de la figura 1, es la función matemática que nos indica cuanto se avanza hacia arriba, a medida que esta avanza a la derecha (sobre el eje *"x"*), en otras palabras $f(x)$. La derivada de la función anterior $f'(x)$, nos proporciona el valor de cambio en la pendiente en cualquier parte de $f(x)$.

Medir el ángulo de la tangente en una hoja de papel se puede realizar con un transportador, pero en la práctica real esto no funciona, es por esta razón que necesitamos saber cómo calcular la derivada y posteriormente como aplicarla.

2.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si tomamos dos puntos indiferentes de una función; estos poseen una coordenada rectangular en un plano cartesiano (x, y), las cuales se pueden localizar en los puntos que muestran la *figura 8*.

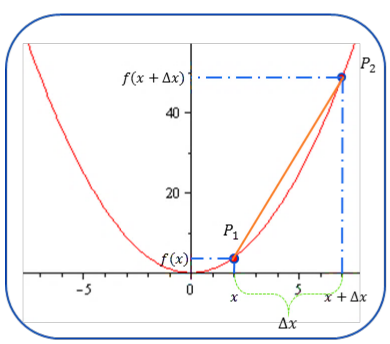


Figura 8. Coordenadas de dos puntos

Recuerda que Δx es el incremento desde un punto *"a"* hasta un punto *"b"*, lo cual es un diferencial en *"x"* (dx). Entonces definimos a $P_1 = (x, f(x))$ y al siguiente punto como $P_2 =$

$(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, donde Δx es el incremento sobre el eje *"x"* hacia el siguiente punto, lo cual nos indica que el siguiente punto es la suma de $x + \Delta x$.

Ahora pensemos, ¿Qué sucede cuando $x + \Delta x$, va tomando valores cercanos a x ? Primero analizamos que los puntos P_1 y P_2, al unirlos dan como respuesta una recta secante, ya que corta una curva en dos puntos, como se observa en la *figura 9*.

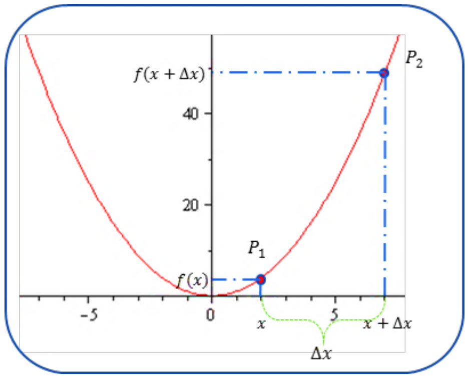


Figura 9. Recta Secante

Entonces a medida que $x + \Delta x$ inicia el proceso de acercamiento hacia x, y a su vez también lo hace $f(x + \Delta x)$ hacia $f(x)$, el punto se recorre de tal forma que se acerca a la pendiente llegando a encontrar la tangente en un determinado punto. Esto quiere decir que Δx se va disminuyendo, ver la *figura 10*.

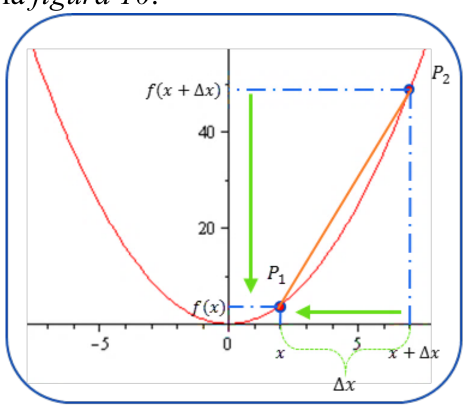


Figura 10. Acercamiento de P2 a P1

En las figuras posteriores se puede observar el efecto que tiene sobre la recta un acercamiento entre los puntos P_1 y P_2, sólo de forma representativa en la *figura 11* se muestra un primer acercamiento y un segundo acercamiento en la *figura 12*.

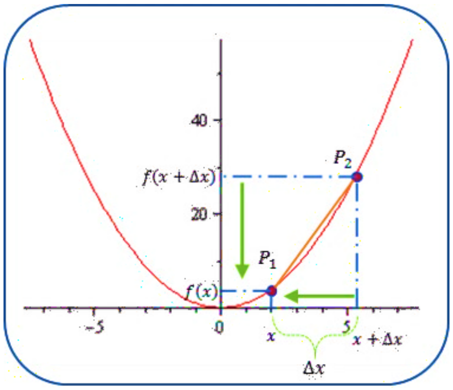


Figura 11. Primer acercamiento de P1 y P2

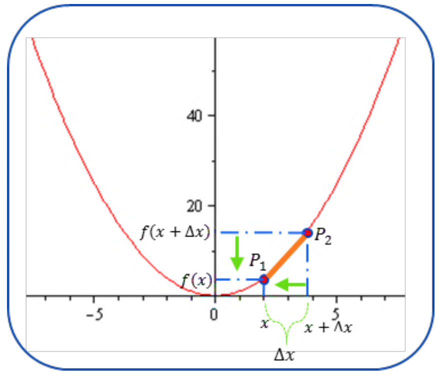


Figura 12. Segundo acercamiento de P1 y P2

En la *figura 13* se puede observar los acercamientos de $x + \Delta x$ en dirección a x, y como se puede ver el incremento Δx se hace cada vez más pequeño por cual se deduce que la recta secante se transforma en una recta tangente.

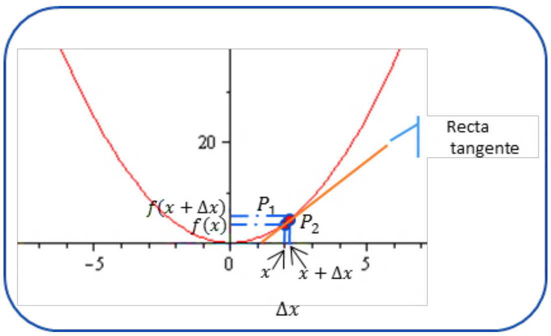


Figura 13. Transformación de secante a tangente

Entonces, ¿Cómo expresar el comportamiento anterior en términos matemáticos? Para eso hay que comprender que la pendiente de la tangente es igual a la aproximación de la pendiente de la secante, la notación es:

$$m_{tan} = Aprox.m_{sec} \tag{1}$$

Hay que considerar que, $y_2 - y_1$ es el incremento sobre el eje *"y"* denotado por un Δy. Para $x_2 - x_1$ es el incremento sobre el eje *"x"* denotado por un Δx.

Tomando en cuenta que la pendiente de la secante es:

$$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

Sustituimos (2) en (1) en la notación para la pendiente de la tangente, quedaría de la siguiente forma.

$$m_{tan} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{3}$$

Si se observa la *figura 14*, se puede ver el comportamiento de la pendiente de la secante con respecto a la tangente, en la ecuación (3) se puede sustituir "y_2" evaluada como $f(x_2)$, y a "y_1" evaluada como $f(x_1)$. Si se sabe que Δx es el incremento en el cateto adyacente, quedaría como $\Delta x = x_2 - x_1$.

$$m_{tan} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{\Delta x} \quad (4)$$

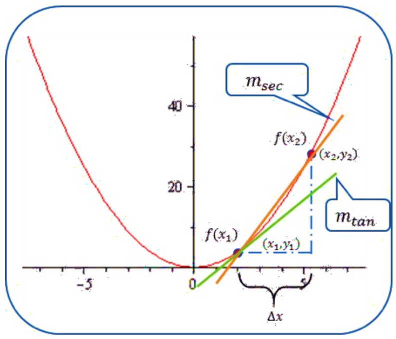


Figura 14. Pendiente secante y tangente

Si recordamos en la *figura 10* el acercamiento de P_2 a P_1, la recta secante se va convirtiendo en una recta tangente y el Δx, que es la distancia del cateto adyacente, se va reduciendo hasta llegar casi al cero (tendencia a cero, $\Delta x \to 0$). Aplicando la teoría sobre límites matemáticos a la ecuación (4), y despejando x_2 del valor inicial de $\Delta x = x_2 - x_1$, tendremos toda la ecuación a razón de una sola variable $x_2 = \Delta x + x_1$.

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_1)-f(x_1)}{\Delta x} \quad (5)$$

Este límite permite encontrar la pendiente de la tangente de diversas funciones, entonces tendremos una derivada, utilizando la notación dy/dx.

$$dy/dx = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_1)-f(x_1)}{\Delta x} \quad (6)$$

Entonces, la **definición técnica de la derivada** en base al análisis anterior es:

La función f es derivable en x si

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_1)-f(x_1)}{\Delta x} \quad \textbf{\textit{existe.}}$$

En este caso el límite se asigna por $f'(x)$ y recibe el nombre de **derivada de f en x**.

2.3 Notación Diferencial

La notación más usual de la derivada es la siguiente:

Se lee, derivada de y con respeto a *x*

Se lee, *f* prima de *x*, la cual es la función ya derivada.

$$\boxed{\frac{dy}{dx}} = \boxed{f\acute{}(x)}$$

Entonces se puede decir que la función es *"y=f(x)"* y su derivada es *" y´ "*.

2.4 Aplicación del límite para encontrar la derivada

En esta sección se aportarán tres ejemplos de aplicación del concepto del límite para encontrar la derivada de una función, ejecutando la notación (6).

a) Encontrar la derivada de la función $f(x) = x^2$

$$f(x) = x^2$$

$$d\,y/d\,x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_1) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Por lo tanto, reemplazar $f(x) = x^2$

$$f(x + \Delta x)$$

$f(x+\Delta x)\ \ f(x)$
$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$
Resolver el binomio cuadrado | Factorizar Δx | Dividir Δx $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}$
Aplicar el límite cuando $\Delta x \to 0$ $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x + 0$
El resultado de la derivada es: $\frac{dy}{dx} = 2x$ o bien $y' = 2x$

b) Encontrar la derivada la función $f(x) = 2x^2 + 3$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x)^2 + 3 - (2x^2+3)}{\Delta x}$$

Resolver el binomio cuadrado | Reducir términos semejantes

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ |

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x^2+2x.\Delta x+\Delta x^2)+3-(2x^2+3)}{\Delta x} = \frac{2x^2+4x.\Delta x+2\Delta x^2+3-2x^2-3}{\Delta x} = \frac{4x.\Delta x+2\Delta x^2)}{\Delta x}$$

Factorizar Δx | Dividir Δx

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta x(4x+2\Delta x)}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x$$

Aplicar el límite cuando

$\Delta x \to 0$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 4x + 2\Delta x = 4x + 0$$

El resultado de la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = 4x \text{ o bien } y' = 4x$$

c) Encontrar la derivada de la función $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x-4}}$

NOTA: Para resolver este ejercicio con la ecuación (6), habrá que racionalizar la sección que contenga un signo (+) o (-) enlazando con una radical, esto con el objetivo de evitar la indeterminación $0/0$.

Resolver la resta de fracciones | Resolver la división

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{3(x+\Delta x)-4}} - \frac{2}{\sqrt{3x-4}}}{\Delta x} = \frac{\frac{2\sqrt{3x-4}-2\sqrt{3(x+\Delta x)-4}}{\sqrt{3(x+\Delta x)-4}\,\sqrt{3x-4}}}{\Delta x}$$

Nota: si se aplica el límite en este paso lleva a c/0

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sqrt{3x-4}-2\sqrt{3(x+\Delta x)-4}}{\Delta x\sqrt{3(x+\Delta x)-4}\,\sqrt{3x-4}}$$

Racionalizar el numerador

Nota: se repite el numerador con signo positivo y se divide entre el mismo

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sqrt{3x-4}-2\sqrt{3(x+\Delta x)-4}}{\Delta x\sqrt{3(x+\Delta x)-4}\,\sqrt{3x-4}} * \frac{2\sqrt{3x-4}+2\sqrt{3(x+\Delta x)-4}}{2\sqrt{3x-4}+2\sqrt{3(x+\Delta x)-4}}$$

Multiplicar la fracción

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(3x-4)-4(3x+3\Delta x-4)}{\Delta x\sqrt{3(x+\Delta x)-4}\,\sqrt{3x-4}*2\sqrt{3x-4}+2\sqrt{3(x+\Delta x)-4}}$$

Reducir términos semejantes

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12x-16-12x-12\Delta x+16}{\Delta x\sqrt{3(x+\Delta x)-4}\,\sqrt{3x-4}*2\sqrt{3x-4}+2\sqrt{3(x+\Delta x)-4}}$$

Dividir entre Δx

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-12\Delta x}{\Delta x\sqrt{3(x+\Delta x)-4}\,\sqrt{3x-4}*2\sqrt{3x-4}+2\sqrt{3(x+\Delta x)-4}}$$

Aplicar el límite cuando y reducir nuevamente términos semejantes $\Delta x \to 0$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-12}{\sqrt{3(x+0)-4}\,\sqrt{3x-4}*2\sqrt{3x-4}+2\sqrt{3(x+0)-4}}$$

Multiplicar las raíces y sumar sus potencias

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-12}{\sqrt{3x-4}\,\sqrt{3x-4}*(4\sqrt{3x-4})} = \frac{-12}{4(3x-4)^{3/2}}$$

El resultado de la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{(3x-4)^{3/2}} \text{ o bien } y' = \frac{-3}{\sqrt{(3x-4)^3}}$$

Como se puede observar en el ejemplo del inciso **c)**, cuando la función se complica un poco y se aplica la notación del límite para obtener la derivada, esta se puede volver muy tediosa de resolver. Para reducir el número de operaciones y hacer mas eficiente el proceso de resolver las derivadas, se recomienda aplicar las reglas o fórmulas para derivar.

Antes que cualquier otra cosa, adquiere sabiduría
y ella te dará inteligencia en todas las cosas.
Rey Salomón

CAPÍTULO 3. DERIVADAS ALGEBRAICAS

3.1 REGLAS DE DERIVACIÓN

A continuación, se describirán las reglas de derivación, las cuales estarán explicadas detalladamente con 3 ó 4 ejercicios por regla, y al final se hará un repaso con combinaciones de las mismas, se escribirá la fórmula formalmente (marcada con **negrita**) y una informal sobre la misma línea, dando a entender que es la misma fórmula, la cual utilizaremos.

En desarrollo de formula informal, se tomará la *"d"* con un indicador que debemos derivar lo que sigue en el paréntesis.

3.2 REGLA DE LA CONSTANTE

La derivada de una función **constante** es igual a cero, por lo tanto, si "c" es un número real, entonces tendremos la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\frac{d(c)}{dx} = 0} \quad \gg\gg d(c) = 0 \qquad (1)$$

Por ejemplo:

a) $f(x) = 5$, la expresión quedaría: $d(5) = 0$

Por lo tanto, $f'(x) = 0$

b) $f(x) = e \;\gg\gg\; d(e) = 0$

$f'(x) = 0$

c) $f(x) = \pi \;\gg\gg\; d(\pi) = 0$

$f'(x) = 0$

d) $f(x) = 3/5 \;\gg\gg\; d(3/5) = 0$

$f'(x) = 0$

3.3 Derivada de una variable

Cabe mencionar que, si bien esta función se puede derivar con la regla de la potencia, se describirá de forma breve cuando es sólo una variable con potencia uno exclusivamente. Con la siguiente expresión:

$$\frac{d(x)}{dx} = 1 \quad \ggg \quad d(x) = 1 \tag{2}$$

Esto quiere decir que cualquier variable con potencia uno será igual a la unidad.

3.4 Regla del múltiplo constante

Si $\boldsymbol{f}$ es una función derivable "$\boldsymbol{f(x)}$" y c es un único número real, entonces el producto de los dos términos se puede derivar. La expresión es la siguiente:

$$\frac{\boldsymbol{d(cf(x))}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{c}\frac{\boldsymbol{d(f(x))}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{cf'(x} \qquad d(cf) = cf'$$

Observa que la constante “c” se deja afuera de la derivada y al final se multiplica con el resultado.

Por ejemplo:

a) $f(x) = 3x$, la expresión quedaría $d(3x) = 3d(x)$, aplicando (2) en la parte a derivar se obtiene que la derivada es igual a la unidad, por lo tanto, el resultado sería 3.

$f'(x) = 3$

b) $f(x) = \pi x \ \ggg d(\pi x) = \pi d(x) = \pi(1) = \pi$

$f'(x) = \pi$

c) $f(x) = bx \ \ggg d(bx) = bd(x) = b(1) = b$

$f'(x) = b$

d) $f(x) = 4ax \ \ggg d(4ax) = 4ad(x) = 4a(1) = 4a$

$f'(x) = 4a$

3.5 Regla de la potencia

Si se tiene una variable elevada a una potencia *“n”*, siendo *“n”* un número racional. Entonces la expresión para derivar es la siguiente:

$$\frac{\boldsymbol{d(x^n)}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{nx^{n-}} \qquad dx^n = nx^{n-1} \tag{4}$$

Note que el valor de *“n”* queda multiplicando a la variable y en la potencia se resta la unidad.

Por ejemplo:

a) $f(x) = x^5$, la expresión quedaría $d(x^5)$, teniendo en cuenta que n=5, se aplica la regla (4), donde n=5 multiplica a la variable y a la potencia se le resta la unidad, por lo tanto, la derivada: $d(x^5) = 5x^{5-1} = 5x^4$

$f'(x) = 5x^4$ (Resultado final de la derivada)

b) $f(x) = x^{3/2} \ggg d(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \boldsymbol{\frac{3}{2}x^{1/2}}$, éste puede ser un resultado final, o bien se puede optimizar, aplicando la siguiente **propiedad**:

$$\boldsymbol{x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}} \qquad [1.a]$$

El resultado final es: $\frac{3}{2}\sqrt{x}$, cabe notar que, aunque el valor de *b=2*, en la propiedad [*1.a*], no se coloca, porque queda implícito en la raíz cuadrada.

$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} \ggg d(x^{1/3}) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$. Se puede observar que la potencia de la variable es negativa, la cual es un recíproco y se le puede aplicar la siguiente **propiedad**:

$$\boldsymbol{x^{-1} = \frac{1}{x}} \qquad [1.b]$$

Al aplicar la propiedad [*1.b*], el resultado queda como $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$

Ahora aplicar la propiedad [*1.a*], el resultado se optimiza a $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

NOTA: Para este caso se puede aplicar (4), pero existe una expresión que puede acortar el proceso a la solución y que sólo se aplica a la raíz cuadrada de la variable, la cual es la siguiente:

$$\boldsymbol{\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}} \ggg d\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (4.1)$$

Por lo tanto, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3.6 Regla del producto

Es claro que también se puede derivar el producto (multiplicación) de las funciones diferentes (o incluso iguales, aunque no es muy común hacerlo), llámese la primera función *"u"* $[f(x)]$ y la segunda *"v"* $[g(x)]$. La derivada del producto se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{d(u.v)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \ \ggg \ d(uv) = udv + vdu \quad (5)$$

NOTA: Las derivadas que son más complejas, que las que hasta este momento se han resuelto, se les pueden aplicar los siguientes 5 pasos, con el objetivo de hacer fácil la resolución de la derivada.

1) Identificar la formula a utilizar, de acuerdo la (s) función (es).
2) Reescribir la función tal como está en la formula (de preferencia en la informal).
3) Derivar lo que la fórmula *"informal"* indica (siempre lo indica con una *"d"*).
4) Multiplicar los términos que sean necesarios.
5) Reducir términos semejantes (optimizar el resultado).

Por ejemplo:

a) Derivar la siguiente función polinómica: $f(x) = \underbrace{(3x^2 + 3)}_{u}\underbrace{(2x^2 + 1)}_{v}$

NOTA: Pese a que, este tipo de función se puede realizar multiplicando los polinomios, término a término, para ejemplificar la formula *"u.v"* se tomará tal y como está.

Aplicar la fórmula, sustituyendo *"u"* y *"v"*.

$f'(x) = (3x^2 + 3)d(2x^2 + 1) + (2x^2 + 1)\, d(3x^2 + 3)$

Derivar, solo lo que está indicado con la letra "d"

$f'(x) = (3x^2 + 3)\,(4x) + (2x^2 + 1)\,(6x)$

Multiplicar los términos necesarios.

$f'(x) = 12x^3 + 12x + 12x^3 + 6x$

Reducir términos semejantes

$f'(x) = 24x^3 + 18x$

b) Derivar la siguiente función: $f(x) = \underbrace{(1 + x^{-1})}_{u}\underbrace{(x - 1)}_{v}$

Aplicar la fórmula, sustituyendo *"u"* y *"v"*.

$f'(x) = \underset{u}{(1 + x^{-1})}\, \underset{dv}{d(x - 1)} + \underset{v}{(x - 1)}\, \underset{du}{d(1 + x^{-1})}$

Derivar solo lo que está indicado con la letra *"d"*

$f'(x) = (1 + x^{-1})\,(1) + (x - 1)\,(-x^{-2})$

Multiplicar términos necesarios

$f'(x) = 1 + x^{-1} - x^{-1} + x^{-2}$

Reducir términos semejantes

$f'(x) = 1 + x^{-2}$ ó $f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$

3.7 Regla del cociente

La división o cociente entre dos funciones diferentes es posible de derivar, siempre que $g(x) \neq 0$, por lo tanto, toda función racional se puede derivar. El proceso de derivación es muy parecido al del producto y se pueden aplicar los mismos pasos para resolver dichas derivadas. La derivada del cociente se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{d(\frac{u}{v})}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \ggg d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2} \qquad (6)$$

Por ejemplo:

a) Derivar la siguiente función polinómica: $f(x) = \frac{2x^3+5}{4x^2+7} \ \frac{\rightarrow u}{\rightarrow v}$

Aplicar la fórmula, sustituyendo *"u"* y *"v"*.

$$f'(x) = \frac{(4x^2+7)\, d(2x^3+5) - (2x^3+5)\, d(4x^2+7)}{v^2}$$

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$f'(x) = \frac{(4x^2+7)(6x^2) - (2x^3+5)(8x)}{v^2}$

Note que el valor de "v^2" solo queda expresado, ya que no se utilizará por el momento.

Multiplicar términos necesarios

$f'(x) = \frac{24x^4 + 42x^2 - 16x^4 - 40x}{v^2}$

Reducir términos semejantes

$$f'(x) = \frac{8x^4 + 42x^2 - 40x}{(4x^2+7)^2}$$

Note que ahora sí, se escribe el valor de *"v"* y que está elevada al cuadrado.

b) Derivar la siguiente función polinómica: $y = \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$

Aplicar la fórmula, sustituyendo *"u"* y *"v"*.

$y' = \frac{(x^2+x-2)d(x^2-1) - (x^2-1)\, d(x^2+x-2)}{v^2}$

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = \frac{(x^2+x-2)(2x) - (x^2-1)\,(2x+1)}{v^2}$

Multiplicar términos necesarios

$y' = \frac{2x^3+2x^2-4x-2x^3-x^2+2x+1}{v^2}$

Reducir términos semejantes

$y' = \frac{x^2-2x+1}{(x^2+x-2)^2}$

c) Derivar la siguiente función polinómica: $y = \frac{2x+5}{3x-2}$

Aplicar la fórmula, sustituyendo *"u"* y *"v"*.

$y' = \frac{(3x-2)d(2x+5)-(2x+5)d(3x-2)}{v^2}$

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = \frac{(3x-2)(2)-(2x+5)(3)}{v^2}$

Multiplicar términos necesarios

$y' = \frac{6x-4-6x-15}{v^2}$

Reducir términos semejantes

$y' = \frac{-19}{(3x-2)^2}$

3.8 REGLA DE LA CADENA

Aunque implícitamente hemos estado utilizando esta regla, es necesario dedicar un apartado para dar una explicación particular.

La regla de la cadena, implica la derivada de la composición de funciones, como $F = f{\circ}g$, donde *y = f(u)* y *u = g(x)*, lo cual nos lleva a expresar *y= F(x) = f[g(x)]*

Por lo tanto, si *f* y *g* son funciones derivables, entonces *F* es derivable y *F'* se expresa de la siguiente forma:

F' (x) = f' [g(x)]g'(x)

La notación de Leibniz, expresa la regla de la cadena con *y = f(u)* y *u = g(x)*, como:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Note que, *"du"* no se puede cancelar (dividir o "*eliminar*"), ya que este no está definido aún, por lo tanto, $\frac{du}{dx}$ no es un cociente real.

Por ejemplo

a) Derivar la siguiente función, evaluando con la regla de la cadena. $y = \cos(e^x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\cos}_{\text{Función Externa}}(\overbrace{e^x}^{\text{Función Interna}}) = \underbrace{-sen}_{\text{Función Externa}}\,(e^x).(\underbrace{e^x}_{\text{Función Interna}})$$

Derivada de

$$\frac{dy}{dx} = -e^x sen\,(e^x)$$

b) Derivar con la regla de la cadena. $y = (3x+4)^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+4)^3 = 3(3x+4)^{3-1}(3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 9(3x+4)^2$$

c) Derivar con la regla de la cadena. $y = (senx)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(senx)^2 = 2(senx)^{2-1}(cosx)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2senx\ cosx$$

3.9 DERIVADAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Las funciones que hemos tratado hasta este momento se pueden expresar explícitamente como funciones de *"y"* con respecto a *"x"*, por ejemplo: $y = x^2$; y para derivar no presenta mayor dificultad.

En este apartado trataremos funciones en la cual, expresar una variable en función de otra no es tan simple, debido a que se encuentran implícitas una en otra ("*mezcladas*") por ejemplo: $2x^3 + 3x^4y - y^3x = 3$, en la función anterior no es tan simple despejar una variable (*"x"* o *"y"*) para que una quede en función de otra.

Para derivar este tipo de funciones, podemos considerar la siguiente regla:

-Derivar, término a término; considerando cada variable como una función, pero al derivar *"y"* se agrega dy/dx

-Al final despejar dy/dx

Ejemplo:

a) Derivar la siguiente función implícita $x^2 - 4y = 0$

Derivar
Normalmente

$$x^2 - 4y = 0$$

Derivar
Normalmente
y multiplicar dy/dx

$$2x - 4\frac{dy}{dx} = 0$$

Despejar $\frac{dy}{dx}$

$$-4\frac{dy}{dx} = -2x \quad \ggg \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{-4} \quad \ggg \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$$

Para comprobar la eficacia del procesamiento anterior, se despejará *"y"* como variable independiente.

Cabe aclarar que en este ejemplo es sencillo realizar el despeje, pero no siempre es así.

$$x^2 - 4y = 0 \quad \ggg \quad y = \frac{x^2}{4}$$

Derivar la función con (4)

$y' = \frac{2x^{-1}}{4} = \frac{x}{2}$ Se puede observar que ambos resultados son iguales

b) Derivar la siguiente función implícita $2x^3 + 2x^4y - xy^2 = 5$

Derivar
Normalmente

$$2x^3 + 2x^4y - x\,y^2 = 5$$

$u \quad v \quad u \quad v$

Derivar
Normalmente
con (5)

NOTA: Recuerda que, al derivar *"y"* se agrega multiplicando $\frac{dy}{dx}$.

$$6x^2 + 2x^4\frac{dy}{dx} + 8x^3y - 2xy\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$

Factorizar dy/dx y mover los otros miembros al segundo término.

$$\frac{dy}{dx}(2x^4 - 2xy) = y^2 - 6x^2 - 8x^3y$$

Despejar $\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-8x^3y-6x^2}{2x^4-2xy}$

c) Obtener dy/dx de la siguiente función implícita $2x + xy^2 = x^2$

Derivar término a término

$2 + 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 2x$

$2xy\frac{dy}{dx} = 2x - y^2 - 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y^2-2}{2xy}$

d) Derivar implícitamente la siguiente función: $In(xy) = 3y^3$

$In\, x + In\, y = 3y^3$ Aplicar *propiedad* $\boldsymbol{In\,(xy) = In\, x + In\, y}$

$\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 9y^2\frac{dy}{dx}$

$\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx} - 9y^2\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$

$\frac{dy}{dx}(\frac{1}{y} - 9y^2) = -\frac{1}{x}$

$\frac{dy}{dx}(\frac{1-9y^3}{y}) = -\frac{1}{x}$

Regla de la herradura: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\,d}{b\,c}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1-9y^3}{y}} = -\frac{y}{x(1-9y^3)}$

e) Derivar implícitamente la siguiente función: $x\, cosy + y\, cosx = 1$

Aplicar (5), semejante al ejemplo **b)**

$-x\, seny\frac{dy}{dx} + \ cosy - y\, senx + cosx\ \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx}(cosx - x\, seny) = y\, senx - cosy$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y\, senx-cosy}{cosx-x\, seny}$

…todo lo verdadero, en todo lo que es digno de respeto,
en todo lo recto, en todo lo puro, en todo lo agradable,
en todo lo que tiene buena fama.
En toda clase de virtudes debes pensar
Apostol Pablo

CAPÍTULO 4. DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTALES

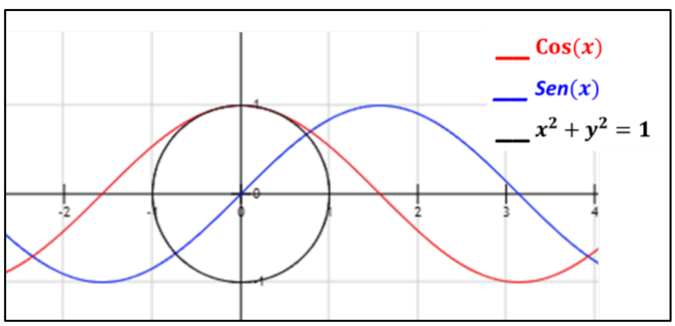
4.1 FUNCIONES TRASCENDENTALES

Derivada de la función seno y coseno

En esta sección abordaremos las funciones trigonométricas, iniciando por las más comunes, la cuales son seno y coseno.

En la *figura 15,* se pueden observar sus respectivos gráficos y las relaciones entre ellas y el círculo unitario.

Figura 15. *Función Seno, Coseno y círculo unitario*



NOTA: A partir de ejercicios más complejos se tendrá que hacer uso de otras fórmulas, que con anterioridad se revisaron, para poder llegar al resultado final, dichas fórmulas se estarán indicando.

Fórmulas de derivación de Seno y Coseno.

$$\frac{d(senv)}{dx} = \frac{dv}{dx}cosv \quad \ggg \quad dsenv = dvcosv \qquad (7)$$

$$\frac{d(cosv)}{dx} = -\frac{dv}{dx}senv \quad \ggg \quad dcosv = -dvsenv \qquad (8)$$

Por ejemplo:

a) Derivar la siguiente función trigonométrica: $y = sen5x$

Aplicar la fórmula (7), sustituyendo *"v"*

Note que, *"5x"* es la función *"v"* que indica la fórmula.

$y' = d(5x)cos5x$ Se puede observar que $d(5x)$ ula (3)

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"* y se llega al resultado final

$y' = 5cos5x$

b) Derivar la siguiente función trigonométrica: $y = 3sen(-\pi x)$

Aplicar la fórmula (7), sustituyendo *"v"*

$y' = 3d(-\pi x)cos(-\pi x)$ En $d(-\pi x)$ aplicar (3), observar que la constante *"3"* se mantiene. Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*, se ordena y se llega al resultado final

$y' = -3\pi cos(-\pi x)$

c) Derivar la siguiente función trigonométrica: $y = 2sen(x^3)$

Aplicar la fórmula (7), sustituyendo *"v"*

$y' = 2d(x^3)cos(x^3)$ En $d(x^3)$ aplicar (4), el resultado se multiplica por la constante *"2"*

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = 6x^2cos(x^3)$

d) Derivar la siguiente función trigonométrica: $y = 4cos\sqrt{x}$

Aplicar la fórmula (8), sustituyendo *"v"*

$y' = -4d(\sqrt{x})sen\sqrt{x}$ En $d(\sqrt{x})$ aplicar (4.1), el resultado se multiplica por la constante *"-4"*

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = -4\frac{1}{2\sqrt{x}}sen\sqrt{x}$

Multiplicar [*(-4)*1/2*] y optimizar el resultado

$y' = -\frac{2sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

e) Derivar la siguiente función trigonométrica: $y = \frac{2}{3}\cos(2x^3 + 1)$

Aplicar la fórmula (8), sustituyendo *"v"*

$y' = \frac{2}{3}d(2x^3 + 1)sen(2x^3 + 1)$ En $d(2x^3 + 1)$ aplicar (4) y (1), el resultado se multiplica por la constante *"2/3"*

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = \frac{2}{3}(6x^2)sen(2x^3 + 1)$

Multiplicar y optimizar el resultado

$y' = 4x^2 sen(2x^3 + 1)$

4.2 DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En esta sección se trabajarán con las funciones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante, en la *figura 16*, se pueden observar sus respectivos gráficos con centro en un círculo unitario.

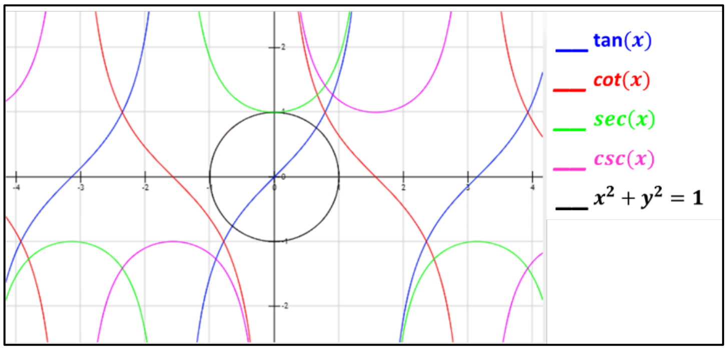


Figura 16. Otras funciones trigonométricas

Fórmulas de derivación:

$$\frac{d(tanv)}{dx} = \frac{dv}{dx} sec^2 v \ggg dtanv = dv\, sec^2 v \quad (9)$$

$$\frac{d(cotv)}{dx} = -\frac{dv}{dx} csc^2 v \ggg dcotv = -dv\, csc^2 v \quad (10)$$

$$\frac{d(secv)}{dx} = \frac{dv}{dx} secv.tanv \ggg dsecv = dv\, secv.tanv \quad (11)$$

$$\frac{d(cscv)}{dx} = -\frac{dv}{dx} cscv.cotv \ggg dcscv = -dv\, cscv.cotv \quad (12)$$

Por ejemplo:

a) Derivar la siguiente función trigonométrica $y = 3tanx^5$

Aplicar la fórmula (9), sustituyendo *"v"*

$y' = 3d(x^5)sec^2 x^5$ En $d(x^5)$ aplicar (4), el resultado se multiplica por la constante *"3"*

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = 3(5x^4)sec^2 x^5$

Multiplicar y optimizar el resultado

$y' = 15x^4 sec^2 x^5$

b) Derivar la siguiente función trigonométrica $y = cot\,(\frac{2}{3}x)$

Aplicar la fórmula (10), sustituyendo *"v"*

$y' = -d(\frac{2}{3}x)csc^2(\frac{2}{3}x)$ En $d(\frac{2}{3}x)$ aplicar (3)

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = -\frac{2}{3}csc^2(\frac{2}{3}x)$ Hasta aquí queda el resultado de la derivada.

c) Derivar la siguiente función trigonométrica $y = \sec\,(a\,x^2)$

Aplicar la fórmula (11), sustituyendo *"v"*

$y' = d(a\,x^2)sec(a\,x^2).tan(a\,x^2)$ En $d(a\,x^2)$ aplicar (3) y (4). Donde *"a"* es una constante

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = 2axsec(a\,x^2).tan(a\,x^2)$

d) Derivar la siguiente función trigonométrica $y = csc\,x^{\frac{1}{2}}$

Aplicar la fórmula (12), sustituyendo *"v"*

$y' = -d(x^{1/2})csc(x^{1/2}).cot(x^{1/2})$ En $d(x^{1/2})$ aplicar (4)

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = -\frac{1}{2}x^{-1/2}csc(x^{1/2}).cot(x^{1/2})$

Optimizar el resultado ($x^{-1/2}$, aplicar *propiedad 1.b* y *1.a*)

$y' = -\frac{csc\sqrt{x}.cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

4.3 REGLA DE LA POTENCIA CON UNA FUNCIÓN

Si se tiene una función (la llamaremos ***"v"***), elevada a una potencia ***"n"***. Entonces la expresión para derivar es la siguiente:

$$\boldsymbol{\frac{dv^n}{dx} = nv^{n-1}\,\frac{d(v)}{dx}} \ggg dv^n = nv^{n-1}\,dv \qquad (13)$$

Note que *"dv"* se tienen que derivar.

Por ejemplo:

a) Derivar la siguiente función $f(x) = \sqrt{2x^2 + x}$

NOTA: Las funciones con radicales se resuelven de forma sencilla, sí el radical se cambia a potencia con (*1.a*), en este ejemplo, quedaría de la siguiente forma: $f(x) = (2x^2 + x)^{1/2}$

Aplicar la fórmula (13), sustituyendo $v = 2x^2 + x$, con *n=1/2*

$y' = \frac{1}{2}\ (2x^2 + x)^{\frac{1}{2}-1}\ d(2x^2 + x)$

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = \frac{1}{2}(2x^2 + x)^{-1/2}\ (4x + 1)$

Simplificar

$y' = \frac{4x+1}{2(2x^2+x)^{\frac{1}{2}}} \quad = \quad \frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x}}$

NOTA: Esta función, que es una raíz cuadrada, también se puede derivar con otra fórmula, dicha expresión es de la siguiente forma:

$$\frac{d\sqrt{v}}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{2\sqrt{x}} \ggg d\sqrt{v} = dv/2\sqrt{v} \qquad (13.1)$$

Aplicar la fórmula (13.1), sustituyendo $v = 2x^2 + x$

$y' = \frac{d(2x^2+x)}{2\sqrt{2x^2+x}}$

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = \frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x}}$

Note que se llega al mismo resultado con ambas fórmulas, solo para el caso de raíz cuadrada.

b) Derivar la siguiente función $f(x) = (4x^2 - 5)^3$

Aplicar la fórmula (13), sustituyendo $v = 4x^2 - 5$, con *n=3*

$y' = 3(4x^2 - 3)^{3-1}\ d(4x^2 - 5)$

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = 3(4x^2 - 3)^2\ (8x)$

Multiplicar y ordenar el resultado

$y' = 24x(4x^2 - 3)^2$

c) Derivar la siguiente función $y = cos^3x$

NOTA: Para este tipo de función es conveniente expresarla de la siguiente forma equivalente $(cosx)^3$

Aplicar la fórmula (13), sustituyendo $v = cosx$, con *n=3*

$y' = 3(cosx)^{3-1}d(cosx)$ En $d(cosx)$ aplicar (8)

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = 3(cosx)^2(-senx)$

Multiplicar y ordenar el resultado

$y' = -3senx.cos^2x$

d) Derivar la siguiente función $f(x) = \frac{1}{(t+\frac{2}{t})^2}$

Mover el denominador hacia el numerador (se cambia el signo de la potencia), aplicando [*1.b*]

$f(x) = (t + \frac{2}{t})^{-2}$

Aplicar la fórmula (13), sustituyendo $v = (t + \frac{2}{t})$, con *n=-2*

$y' = -2(t + \frac{2}{t})^{-2-1}\, d\left(t + \frac{2}{t}\right)$ En $d\left(t + \frac{2}{t}\right)$ aplicar (2) y para derivar $\frac{2}{t}$ utilizar la siguiente fórmula:

$$\frac{d(\frac{c}{v})}{dx} = -\frac{cdv}{v^2} \ \ggg \ d\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{cdv}{v^2} \qquad (13.2)$$

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = -2(t + \frac{2}{t})^{-3}\,(1 - \frac{2}{t^2})$

Optimizar el resultado

$$y' = \frac{-2\,(1 - 2t^{-2})}{(t + \frac{2}{t})^3} = \frac{4t^{-2} - 2}{(t + \frac{2}{t})^3}$$

4.4 Regla del recíproco

NOTA: Cabe aclarar que la siguiente regla forma parte de las funciones trigonométricas, pero que, es usada como auxiliar de forma intercambiable para derivar otro tipo de funciones.

En esta sección se abordarán otros ejemplos con la fórmula (13.2), que es la regla del recíproco, donde *"v"* es una función ***f(x)*,** dicha fórmula es obtenida de la fórmula (13), es aplicable a una función o a la correspondencia de una sola variable.

Por ejemplo:

a) Derivar la siguiente función $f(x) = -\frac{3}{x}$

Aplicar la fórmula y derivar

$y' = -\frac{(-3.dx)}{x^2}$

Simplificar

$y' = \frac{3}{x^2}$

b) Derivar la siguiente función $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

Aplicar la fórmula (13.2), sustituyendo $v = \sqrt{x}$

$y' = \frac{-2d(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2}$ En $d(\sqrt{x})$ aplicar (4.1)

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = \frac{-2}{x} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$ En $x^{-\frac{1}{2}}$ aplicar [*1.b*]

Simplificar y ordenar

$y' = \frac{-1}{x.x^{1/2}} = -\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[3]{x}}$

4.5 REGLA PARA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICAS

Las funciones ***e***xponenciales, ***l***ogaritmo ***n***atural y logaritmos, son derivables. Observa en el gráfico de la *figura 17*, que la función $y = e^x$ en comparación con $y = \ln(x)$, son funciones inversas.

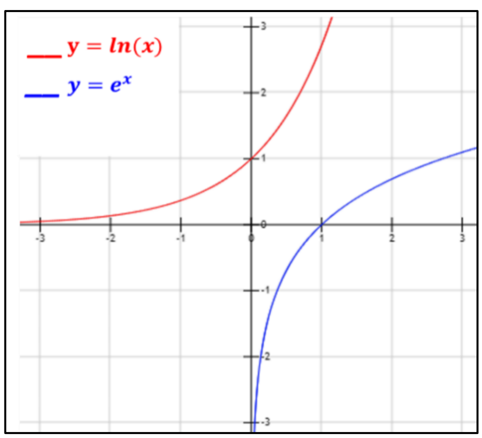


Figura 17. Función exponencia (e) y logaritmo natural

La función exponencial real, que contiene el número de Euler (número irracional), tiene la característica de que, su derivada, siempre es igual a la misma función, siempre que la variable sea simplemente *"x"* positiva, en caso de que ésta, represente una función más compleja, la expresión para derivar un exponencial de base "e" será la siguiente:

$$\frac{de^v}{dx} = \frac{dv}{dx}e^v \ggg de^v = dve^v \qquad (14)$$

Por ejemplo:

a) Derivar la siguiente función $y = 2e^{-3x}$

Aplicar la fórmula (14), sustituyendo $v = -3x$

$y' = 2d(-3x)e^{-3x}$ En $d(-3x)$ aplicar (3) y (2) y el resultado multiplicarlo por *"2"*

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = 2(-3)e^{-3x}$

Simplificar

$y' = -6e^{-3x}$

Observe que la derivada de *"v"* siempre baja multiplicando a la función inicial.

b) Derivar la siguiente función $y = -be^{-5x^2}$

Aplicar la fórmula (14), sustituyendo $v = -5x^2$

$y' = -b.d(-5x^2)e^{-5x^2}$ En $d(-5x^2)$ aplicar (3) y (4) y el resultado multiplicarlo por *"-b"*

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = -b(-10x)e^{-5x^2}$

Simplificar y ordenar

$y' = 10bxe^{-5x^2}$

Para la función exponencial con base *"a"* (constante), donde *"a"* es un número real distinto de *uno* y mayor que cero. Entonces la derivada de dicha función es, la misma función multiplicada por el logaritmo natural (neperiano) con potencia de una sola variable en *"a"*; en caso de que *"a"* este elevado a una función de *"v"*, se agrega multiplicando la $dv/_{dx}$.

La expresión es la siguiente:

$$\frac{\boldsymbol{da^x}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{a^x In\ a} \ \ggg\ da^x = a^x Ina \qquad (15)$$

$$\frac{\boldsymbol{da^v}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}\boldsymbol{a^v In\ a} \ \ggg\ da^v = dva^v Ina \qquad (15.1)$$

Por ejemplo:

a) Derivar la siguiente función $y = 3^x$

Aplicar la fórmula (15) y se obtiene el resultado $y' = 3^x In3$

b) Derivar la siguiente función $y = 2^{cosx}$

Aplicar la fórmula (15.1), sustituyendo $v = \cos(x)$

$y' = d(cos\ x)\,2^{cos\ x} In\ 2$ En $d(cos\ x)$, aplicar (8)

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = -\,sen\,x\,2^{\cos x} In\,2$

Para una función trascendental como el logaritmo natural, la derivada de un logaritmo natural de una función es igual a la derivada de la función sobre la misma función. La expresión es la siguiente:

$$\frac{\boldsymbol{d\ In\ v}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}}{\boldsymbol{v}} \ \ggg\ d\ In\ v = \frac{dv}{v} \qquad (16)$$

a) Derivar la siguiente función $y = In\ 9x$

Aplicar la fórmula (16), sustituyendo $v = \ 9x$

$y' = \frac{d(9x)}{9x}$ En $d(\ 9x)$ aplicar (3) y (2)

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = \frac{9}{9x}$

Simplificar

$y' = \frac{1}{x}$

b) Derivar la siguiente función $y = In\ (2x^2 + 8)$

Aplicar la fórmula (16), sustituyendo $v = 2x^2 + 8$

$y' = \frac{d(2x^2+8)}{2x^2+8}$ En donde $d(2x^2 + 8)$ aplicar (3) y (4)

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = \frac{4x}{2x^2+8}$

Para obtener la derivada de un logaritmo en cualquier base, ésta es igual a la derivada de función sobre la función, por el logaritmo de su base (*"b"*) por *"e"*. Como lo muestra la expresión: $\frac{d log_b v}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{v}\ log_b e$

Por propiedad el $log_b e = \frac{In\ e}{In\ a} = \frac{1}{In\ a}$, entonces, la expresión anterior se convierte en:

$$\frac{\boldsymbol{dlog_b v}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}}{\boldsymbol{v}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{In\ b}} \ \ggg\ d\ log_b\ v = \frac{dv}{v}\frac{1}{In\ b} \qquad (17)$$

a) Derivar la siguiente función $y = log_b(3x^2 + 5)$

Aplicar la fórmula (17), sustituyendo $v = 3x^2 + 5$

$y' = \frac{d(3x^2+5)}{3x^2+5} \cdot \frac{1}{In\ b}$ En $d(3x^2 + 5)$, aplicar (3) y (2)

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = \frac{6x}{3x^2+5} \frac{1}{In\, b}$

Simplificar

$y' = \frac{6x}{In\, b(3x^2+5)}$

4.6 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Hasta este momento ya se han revisado la mayoría de las fórmulas de derivadas; y ya estas familiarizado con los procedimientos. En este apartado se abordarán las funciones trigonométricas inversas, las cuales cuentan con características similares. En la *figura 18* se pueden observar sus respectivos gráficos.

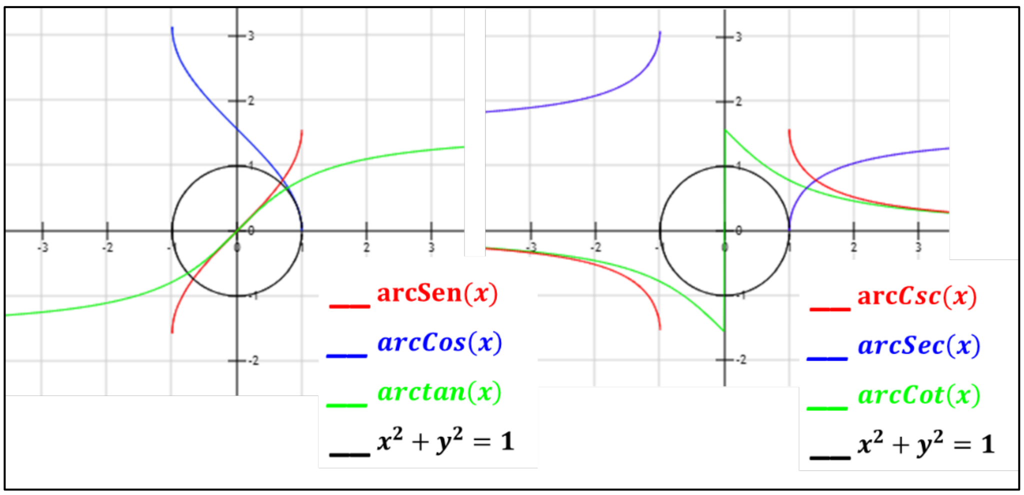


Figura 18. Funciones trigonométricas inversas

Hay que tener claro que para escribir de forma matemática las funciones inversas, se expresan como arcos de la función y se lee *"función cuyo arco es"* el cual es el ángulo central en la circunferencia y en sus respectivas gráficas, todas tienen una relación. Las expresiones son de la siguiente forma:

$$\frac{d\, arc\, sen\, v}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}} \quad \ggg \quad d\, arc\, sen\, v = \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (18)$$

$$\frac{d\, arc\, cos\, v}{dx} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}} \quad \ggg \quad d\, arc\, cos\, v = -\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (19)$$

$$\frac{d\, arc\, tan\, v}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{v^2+1} \quad \ggg \quad d\, arc\, tan\, v = \frac{dv}{v^2+1} \qquad (20)$$

$$\frac{d\, arc\, cot\, v}{dx} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v^2+1} \quad \ggg \quad d\, arc\, cot\, v = -\frac{dv}{v^2+1} \qquad (21)$$

$$\frac{d\, arc\, sec\, v}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}} \quad \ggg \quad d\, arc\, sec\, v = \frac{dv}{v\sqrt{v^2-1}} \qquad (22)$$

$$\frac{d\, arc\, csc\, v}{dx} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}} \quad \ggg \quad d\, arc\, csc\, v = -\frac{dv}{v\sqrt{v^2-1}} \qquad (23)$$

Por ejemplo:

a) Derivar la siguiente función $y = arc\ sen\ (x^2 - x)$

Aplicar la fórmula (18), sustituyendo $v = x^2 - x$

$$y' = \frac{d(x^2-x)}{\sqrt{1-(x^2-x)^2}}$$

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$$y' = \frac{2x-1}{\sqrt{1-(x^2-x)^2}}$$

b) Derivar la siguiente función $y = arc\ cos\ \sqrt{x}$

Aplicar la fórmula (19), sustituyendo $v = \sqrt{x}$

$$y' = \frac{-d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$$

Derivar $d(\sqrt{x})$, con (4.1)

$$y' = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}$$

Simplificar con regla de herradura.

Regla de la herradura: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\ d}{b\ c}$

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{(1-x)x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

c) Derivar la siguiente función $y = ac\ tan\ (2 - x^5)$

Aplicar la fórmula (20), sustituyendo $v = 2 - x^5$

$$y' = \frac{d(2-x^5)}{(2-x^5)^2+1}$$

Derivar $d(2 - x^5)$

$$y' = \frac{-5x^4}{(2-x^5)^2+1}$$

d) Derivar la siguiente función $y = arc\ cot\ (\frac{2}{2x-1})$

Aplicar la fórmula (21), sustituyendo $v = (\frac{2}{2x-1})$

$$y' = -\frac{d(\frac{2}{2x-1})}{(\frac{2}{2x-1})^2+1}$$

Derivar $d\left(\frac{2}{2x-1}\right)$, con (13.2)

$$y' = \frac{\frac{-2d(2x-1)}{(2x-1)^2}}{(\frac{2}{2x-1})^2+1}$$

Surge una nueva derivada, aplicar (13.2) y $d(2x-1) = 2$

Simplificar numerador y denominador

$$y' = \frac{\frac{-4}{(2x-1)^2}}{\frac{4}{(2x-1)^2}+1} = \frac{\frac{-4}{(2x-1)^2}}{\frac{4+(2x-1)^2}{(2x-1)^2}}$$

Aplicar regla de la herradura.

$$y' = \frac{-4(2x-1)^2}{(2x-1)^2[4+(2x-1)^2]} = -\frac{4}{4+(2x-1)^2}$$

e) Derivar la siguiente función $y = arc\ sec\ (e^{3x})$

Aplicar la fórmula (22), sustituyendo $v = e^{3x}$

$$y' = \frac{d(e^{3x})}{e^{3x}\sqrt{(e^{3x})^2-1}}$$

Derivar $d(e^{3x})$, con (14)

$$y' = \frac{3e^{3x}}{e^{3x}\sqrt{(e^{3x})^2-1}}$$

Simplificar

$$y' = \frac{3}{\sqrt{e^{6x}-1}}$$

f) Derivar la siguiente función $y = arc\ csc\ (-x-1)$

Aplicar la fórmula (23), sustituyendo $v = -x-1$

$$y' = -\frac{d(-x-1)}{(-x-1)\sqrt{(-x-1)^2-1}}$$

Derivar $d(-x-1)$

$$y' = -\frac{-1}{(-x-1)\sqrt{(-x-1)^2-1}}$$

Simplificar

$$y' = \frac{1}{(-x-1)\sqrt{x^2+2x+1-1}} = \frac{1}{(-x-1)\sqrt{x^2+2x}}$$

4.7 DERIVADA DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Las funciones trigonométricas hiperbólicas, tienen una estrecha relación con la función exponencial base *"e"*, por ejemplo, si deseamos obtener el seno hiperbólico de *"v"* o bien el coseno hiperbólico, podríamos escribirlo de la siguiente forma:

$senh\ v = \frac{e^v - e^{-v}}{2}$, $cosh\ v = \frac{e^v + e^{-v}}{2}$

Por lo tanto, ambas están relacionadas con la función principal de la hipérbola, por la diferencia del cuadrado de ellas.

$cosh^2 v - senh^2 v = a^2$

En la *figura 19* se pueden observar sus respectivos gráficos de cada función hiperbólica.

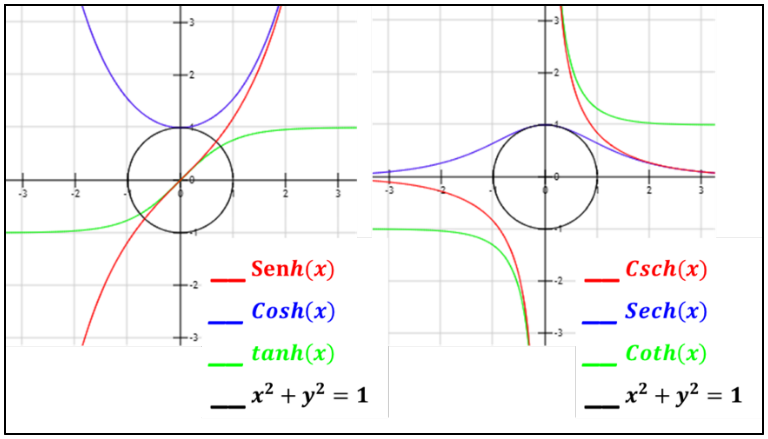


Figura 19. Funciones hiperbólicas

Y cada función trigonométrica hiperbólica es derivable de su función *"v"*. Con las siguientes expresiones:

$\frac{d\ senh\ v}{dx} = \frac{dv}{dx} \cosh v$ $\ggg$ $d\ senh\ v = dv \cosh v$ (24)

$\frac{d\ cosh\ v}{dx} = \frac{dv}{dx} senh\ v$ $\ggg$ $d\ cosh\ v = dv\ \mathrm{senh}\ v$ (25)

$\frac{d\ tgh\ v}{dx} = \frac{dv}{dx} sech^2\ v$ $\ggg$ $d\ tgh\ v = dv\ sech^2\ v$ (26)

$\frac{d\ coth\ v}{dx} = -\frac{dv}{dx} csch^2\ v$ $\ggg$ $d\ coth\ v = -dv\ csch^2\ v$ (27)

$\frac{d\ sech\ v}{dx} = -\frac{dv}{dx} \mathrm{sech}\, v\, .\, tgh\ v$ $\ggg$ $d\ sech\ v = -dv\ \mathrm{sech}\, v\, .\, tgh\ v$ (28)

$\frac{d\ csch\ v}{dx} = -\frac{dv}{dx} \mathrm{csch}\, v\, .\, ctgh\ v$ $\ggg$ $d\ csch\ v = -dv\ \mathrm{csch}\, v\, .\, tgh\ v$ (29)

Ejemplos de derivadas trigonométricas hiperbólicas

a) Derivar la siguiente función $y = cosh\ (x^2)$

Aplicar la fórmula (25), sustituyendo $v = x^2$

$y' = d(x^2) senh(x^2)$ En $d(x^2)$, aplicar (4)

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = 2x\ senh(x^2)$

b) Derivar la siguiente función $y = senh\,(\sqrt[3]{x})$

Aplicar la fórmula (24), sustituyendo $v = \sqrt[3]{x}$

$y' = d(\sqrt[3]{x})cosh(\sqrt[3]{x})$ En $d(\sqrt[3]{x})$ aplicar [*1.a*] y después (4)

Derivar por separado sólo lo que está indicado con la letra *"d"* y luego anexarlo al resultado

$d\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$ Aplicar [*1.b*] y [*1.a*]

$d\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Simplificar el resultado final.

$y' = \frac{\cosh(\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x^2}}$

c) Derivar la siguiente función $y = tgh\,(3x^2 + 1)$

Aplicar la fórmula (26), sustituyendo $v = 3x^2 + 1$

$y' = d(3x^2 + 1)sech^2(3x^2 + 1)$ En $d(3x^2 + 1)$, aplicar (4) y (1)

Derivar sólo lo que está indicado con la letra *"d"*

$y' = 6x\ sech^2(3x^2 + 1)$

d) Derivar la siguiente función $y = sech\,(\sqrt{2x + 1})$

Aplicar la fórmula (28), sustituyendo $v = \sqrt{2x + 1}$

$y' = -d(\sqrt{2x + 1})sech(\sqrt{2x + 1}).tgh(\sqrt{2x + 1})$ En $d(\sqrt{2x + 1})$, aplicar (13)

Derivar por separado sólo lo que está indicado con la letra *"d"* y después anexarlo al resultado

$d(2x + 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,(2x + 1)^{\frac{1}{2}-1}\,d(2x + 1) = \frac{1}{2}(2x + 1)^{-\frac{1}{2}}(2)$ Multiplicar el $2\ por$ ½, y aplicar [*1.b*] y [*1.a*]

$= \frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

Simplificar el resultado final

$y' = -\frac{sech\sqrt{2x+1}.tgh\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$

Te aconsejo que te esfuerces y tengas firmeza,
no temas ni te desanimes, el Altisimo estará contigo.
Líder Josue

CAPÍTULO 5. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

5.1 MEDICIÓN APROXIMADA DE FIGURAS AMORFAS

Es muy sencillo medir áreas de figuras que tienen una forma conocida y de las cuales ya se saben sus fórmulas para obtener sus respectivas áreas.

Pero, ¿Cómo medir áreas? Donde, la figura no tiene una forma conocida y lo único que conocemos es su función, la cual es continua positiva "*f*", para esto necesitamos acotar la función en un intervalo cerrado [*a, b*], sobre el eje "*x*" para obtener la región R. Para calcular el área **A** de la región **R** de la *figura 20*.

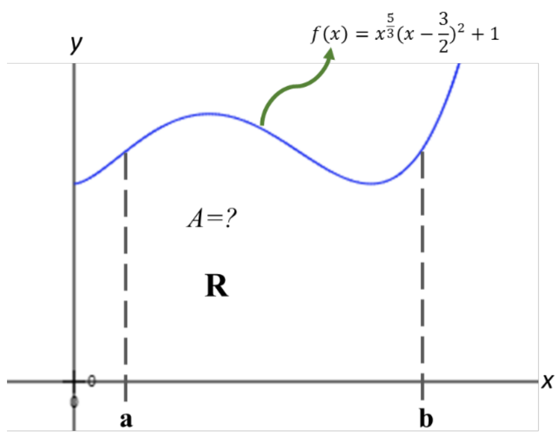


Figura 20.Área de la **R**egión

Dividimos el intervalo de "a" hasta "b" en subintervalos, todos de igual ancho (Δx), para formar "*n*" cantidad de rectángulos en la región "**R**", para obtener el área aproximada total, basta con sumar el área de cada rectángulo.

Entre más rectángulos existen en la región "R", más se aproxima el área real. Cabe mencionar que se pueden obtener dos aproximaciones con un error bastante considerable y debido a que se pueden elegir rectángulos inscritos o circunscritos (*figura 21*).

Como puede observarse en la gráfica de la *figura 21* se obtienen dos errores, por lo tanto, el área aproximada total, es igual a la suma del área subestimada "A_1" más la sobrestimada "A_2" entre 2 (Para obtener un promedio).

$$\boldsymbol{A_{aprox}} = \frac{\boldsymbol{A_1+A_2}}{\boldsymbol{2}} \tag{1}$$

Para encontrar cada uno de los valores, es necesario analizar a detalle la región "R" con sus respectivos "n" números de rectángulos.

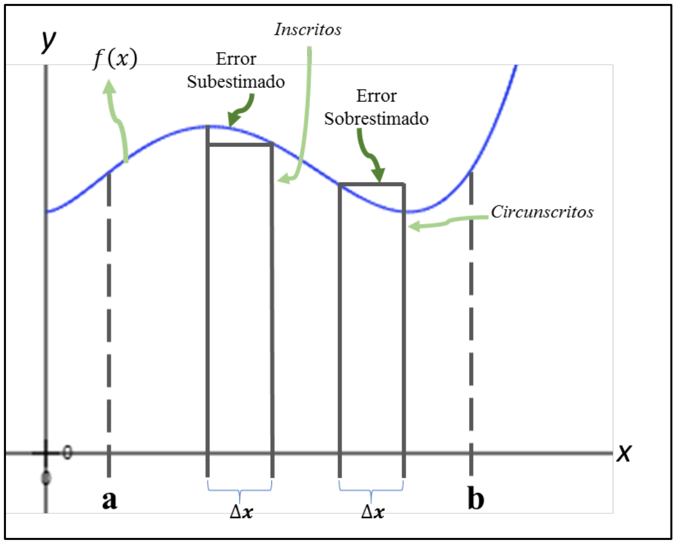


Figura 21. Error subestimado y sobrestimado

En la *figura 22* se muestra la curva $f(x)$ dividida entre "n" números de rectángulos, entonces para poder obtener una aproximación al área total, se deben sumar las áreas individuales de cada rectángulo (base multiplicada por altura "*bxh*"), en este caso se obtiene por la operación $\Delta x * \ f(x_i)$, donde Δx es la base de cada rectángulo y $f(x_i)$ es la altura con respecto al eje "y".

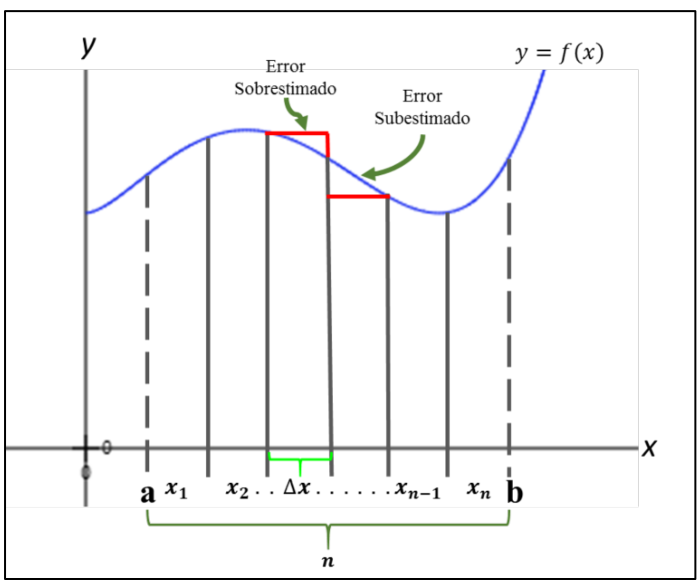


Figura 22. Aproximacion con "n" rectángulos

Donde:

$$\boldsymbol{\Delta x = \frac{b-a}{n}} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{x_0 = a}, \quad \boldsymbol{x_1} = a + \Delta x, \quad \boldsymbol{x_2} = a + 2\Delta x, \ \ldots \quad \boldsymbol{x_{n-1}} = a + (n-1)\Delta x$$

$$\boldsymbol{x_n} = a + n\Delta x = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A_1 = \Delta x[\, f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})]} \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{A_2 = \ \Delta x[\, f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)]} \qquad (4)$$

$$A_{aprox} = \frac{A_1 + A_2}{2}$$

Una forma alternativa para obtener"A_2", sería sí, lo que tiene "A_1" dentro del corchete lo denominamos $\sum f(x_i)$, entonces tenemos una expresión más simple para "A_2".

$$\boldsymbol{A_2 = \Delta x\, [\Sigma f(x_i) - f(x_0) + f(x_n)]} \qquad (5)$$

Para interpretar mejor los datos obtenidos en la *figura 22*, vamos a realizar unos ejemplos y para el primero tomaremos una función muy conocida, como $f(x) = x^2$, la cual estaremos comparando con otros métodos.

Por ejemplo:

a) Realizar la medición del área bajo la curva de función $f(x) = x^2$, en un intervalo cerrado [*0, 4*], con 6, 12 y 18 rectángulos respectivamente y observar sus gráficos y resultados.

En la *figura 23*, se puede revisar la curva y los rectángulos con sus respectivos errores.

Obtener el valor de *Δx*

$$\Delta x = \frac{4-0}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Obtener el área subestimada con los primeros 6 valores, aplicar (3)

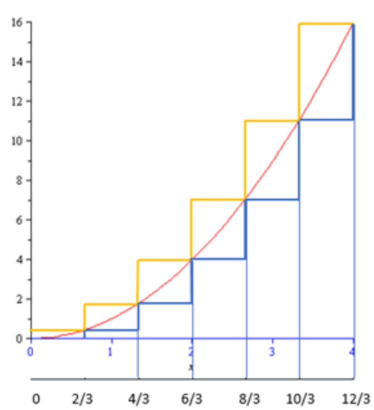


Figura 23. Curva dividida en 6 rectángulos

$A_1 = \frac{2}{3}\left[f(0) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{6}{3}\right) + f\left(\frac{8}{3}\right) + f\left(\frac{10}{3}\right)\right]$

Sustituyendo la función $f(x) = x^2$

$A_1 = \frac{2}{3}\left[(0)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2\right]$

$A_1 = \frac{2}{3}\left[0 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{16}{9}\right) + 4 + \left(\frac{64}{9}\right) + \left(\frac{100}{9}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{220}{9}\right] = \frac{440}{27}$

$A_1 \approx 16.29\, u^2$ NOTA: u^2 representa unidades cuadradas

Obtener el área sobrestimada con los últimos 6 valores con (4)

$A_2 = \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{6}{3}\right) + f\left(\frac{8}{3}\right) + f\left(\frac{10}{3}\right) + f\left(\frac{12}{3}\right)\right]$

Sustituir en la función $f(x) = x^2$

$A_2 = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{12}{3}\right)^2\right]$

$A_2 = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{16}{9}\right) + 4 + \left(\frac{64}{9}\right) + \left(\frac{100}{9}\right) + 16\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{364}{9}\right] = \frac{728}{27}$

$A_2 \approx 26.96\, u^2$

Obtener el área aproximada con (1)

$\boldsymbol{A_{Aprox}} = \frac{16.29+26.96}{2} \approx \mathbf{21.63\, u^2}$

Aplicar (5) para corroborar el resultado del área sobrestimada A_2 y decidir que fórmula es más eficiente.

$A_2 = \frac{2}{3}\left[\frac{220}{9} - 0 + 16\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{364}{9}\right] = \frac{728}{27} \approx 26.96\, u^2$

Realizar la estimación para ***12 rectángulos*¸**como se muestra en la *figura 24.*

Obtener el valor de *Δx*

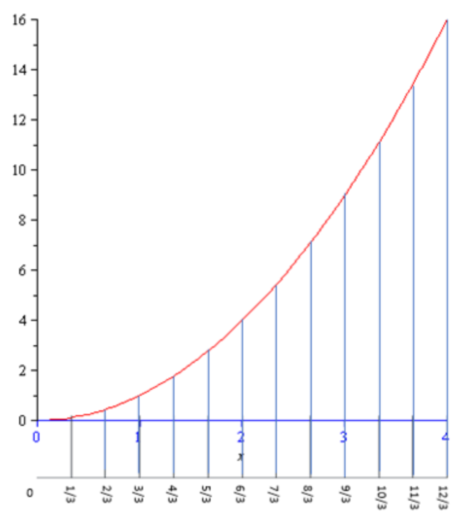


Figura 24. Curva dividida en 12 rectángulos

$\Delta x = \frac{4-0}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Obtener el área subestimada con los primeros 12 valores, aplicar (3)

$$A_1 = \frac{1}{3}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{3}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right) + f\left(\frac{6}{3}\right) + f\left(\frac{7}{3}\right) + f\left(\frac{8}{3}\right) + f\left(\frac{9}{3}\right) + f\left(\frac{10}{3}\right) + f\left(\frac{11}{3}\right)\right]$$

Sustituyendo la función $f(x) = x^2$

$$A_1 = \frac{1}{3}\left[(0)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{9}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{11}{3}\right)^2\right]$$

$$A_1 = \frac{1}{3}\left[0 + \left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) + 1 + \left(\frac{16}{9}\right) + \left(\frac{25}{9}\right) + 4 + \left(\frac{49}{9}\right) + \left(\frac{64}{9}\right) + 9 + \left(\frac{100}{9}\right) + \left(\frac{121}{9}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{506}{9}\right] = \frac{506}{27}$$

$A_1 \approx 18.74\, u^2$

Obtener el área sobrestimada con los últimos 12 valores con (5)

$$A_2 = \frac{1}{3}\left[\frac{506}{9} - 0 + 16\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{650}{9}\right] = \frac{650}{27}$$

$A_2 \approx 24.07\, u^2$

Obtener el área aproximada con (1)

$$\boldsymbol{A_{Aprox}} = \frac{18.74+24.07}{2} \approx \boldsymbol{21.4\, u^2}$$

*Realizar la estimación para **18 rectángulos**,* como se muestra en la *figura 25.*

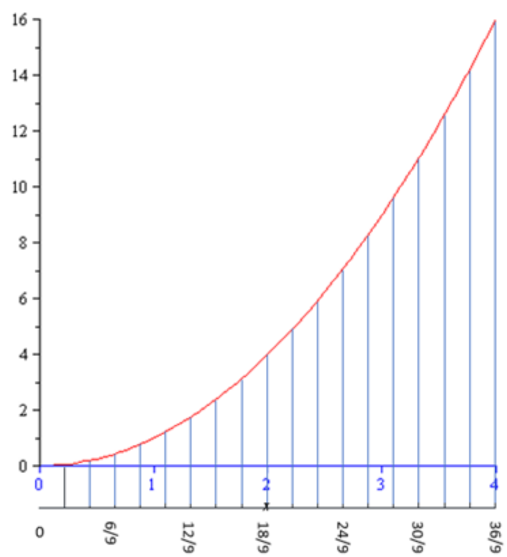


Figura 25. Curva dividida en 18 rectángulos

Obtener el valor de Δx

$\Delta x = \frac{4-0}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

Obtener el área subestimada con los primeros 18 valores, aplicar (3)

$A_1 = \frac{2}{9}\left[f(0) + f\left(\frac{2}{9}\right) + f\left(\frac{4}{9}\right) + f\left(\frac{6}{9}\right) + f\left(\frac{8}{9}\right) + f\left(\frac{10}{9}\right) + f\left(\frac{12}{9}\right) + f\left(\frac{14}{9}\right) + f\left(\frac{16}{9}\right) + \right.$

$\left. f\left(\frac{18}{9}\right) + f\left(\frac{20}{9}\right) + f\left(\frac{22}{9}\right) + f\left(\frac{24}{9}\right) + f\left(\frac{26}{9}\right) + f\left(\frac{28}{9}\right) + f\left(\frac{30}{9}\right) + f\left(\frac{32}{9}\right) + f\left(\frac{34}{9}\right)\right]$

Sustituyendo la función $f(x) = x^2$

$A_1 = \frac{2}{9}\left[(0)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{6}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{12}{9}\right)^2 + \left(\frac{14}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{18}{9}\right)^2 + \right.$

$\left. \left(\frac{20}{9}\right)^2 + \left(\frac{22}{9}\right)^2 + \left(\frac{24}{9}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^2 + \left(\frac{28}{9}\right)^2 + \left(\frac{30}{9}\right)^2 + \left(\frac{32}{9}\right)^2 + \left(\frac{34}{9}\right)^2\right]$

$A_1 = \frac{2}{9}\left[\frac{2380}{27}\right] = \frac{4760}{243}$

$A_1 \approx 19.58\, u^2$

Obtener el área sobrestimada con los últimos 18 valores con (5)

$A_2 = \frac{2}{9}\left[\frac{2380}{27} - 0 + 16\right] = \frac{2}{9}\left[\frac{2812}{27}\right] = \frac{5624}{243}$

$A_2 \approx 23.14\, u^2$

Obtener el área aproximada con (1)

$\boldsymbol{A_{Aprox}} = \frac{19.58+23.14}{2} \approx \mathbf{21.36\, u^2}$

Si se observan **los tres valores** obtenidos en las aproximaciones, cada vez que se incrementa el número de rectángulos, el área se aproxima al área correcta **(64/3) ≈ 21.3** u^2, pero las operaciones también se incrementan, de tal forma que se vuelve más largo y cansado el procedimiento.

b) Obtener el área aproximada de la función $f(x) = 10 - 2x$, en un intervalo cerrado [*0, 3*], con *n=6*.

$\Delta x = \frac{3-0}{6} = 0.5$

$A_1 = 0.5[f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + f(2) + f(2.5)]$

$A_1 = 0.5[\left(10 - 2(0)\right) + \left(10 - 2(0.5)\right) + \left(10 - 2(1)\right) + \left(10 - 2(1.5)\right) + \left(10 - \right.$

$\left. 2(2)\right) + \left(10 - 2(2.5)\right)]$

$A_1 = 0.5[10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5] = 0.5[45] = 22.5\, u^2$

$A_2 = 0.5[45 - 10 + 4] = 0.5[39] = 19.5\, u^2$

$$\boldsymbol{A_{Aprox}} = \frac{22.5+19.5}{2} = \boldsymbol{21\ u^2}$$

Si se grafica la función, se puede observar que el área buscada es exacta (***21 u²***). Debido a que, el área debajo de la función son dos formas básicas conocidas (ver *figura 26*). Un triángulo con base 3 y altura 6 y un rectángulo de base 3 y altura 4.

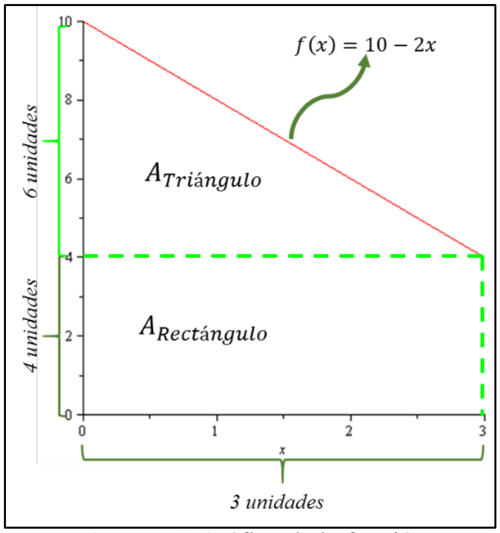


Figura 26. Gráfico de la función

$$A_{Triáng} = \frac{(3)(6)}{2} = \frac{18}{2} = 9\ u^2$$

$$A_{Rect} = (3)(4) = 12\ u^2$$

$$\boldsymbol{A_{Total}} = A_{Triáng} + A_{Rect} = 21\ u^2$$

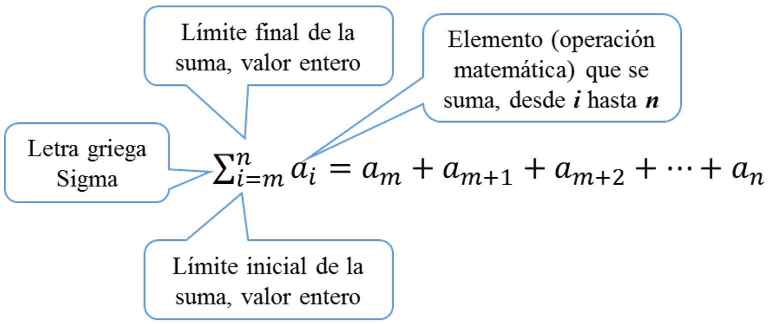
En conclusión, el método de aproximación es más usual utilizarlo con funciones que proporcionan una "*figura no conocida*".

5.2 Notación de suma ($\boldsymbol{Sigma}$)

También conocida como notación sumatorio (informalmente sumatoria), es la operación matemática que nos ayuda a realizar sumas de varios elementos hasta infinitos, sin necesidad de realizar operaciones matemáticas repetidas.

En el caso de obtener áreas por aproximación, entre más rectángulos se evaluaban, más era la cantidad de operaciones matemáticas que se requerían. La notación de suma agiliza este proceso.

Antes de realizar ejemplos, es necesario revisar los elementos de la notación y sus propiedades básicas.



Propiedades básicas

$\sum_{i=1}^{n} c = cn$ *(1.a)*

$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ *(1.b)*

$\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$ *(1.c)*

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{n} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ *(1.d)*

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ *(1.e)*

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$ *(1.f)*

A continuación, se mostrará un ejemplo de sumas repetitivas sin las propiedades y después de forma abreviada.

$\sum_{i=1}^{7} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140$

Se puede observar que, si *"n"* se incrementa, también se incrementa el número de operaciones matemáticas a realizar. Pero al aplicar las propiedades, estas nos ayudan a realizar el proceso de forma más rápida.

$\sum_{i=1}^{7} i^2 = \frac{7(7+1)(2(7)+1)}{6} = \frac{7(8)(15)}{6} = 140$

Aplicando las propiedades, no importa cuanto se incremente *"n"*, el número de operaciones no cambiará.

a) Resolver $\sum_{i=1}^{12}(2i^2 + 5i^3)$

$\sum_{i=1}^{12}(2i^2 + 5i^3) = 2\sum_{i=1}^{12}(i^2) + 5\sum_{i=1}^{12}(i^3) = 2\left[\frac{12(12+1)(2(12)+1)}{6}\right] + 5\left[\frac{12^2(12+1)^2}{4}\right]$

$= 2\left[\frac{12(13)(25)}{6}\right] + 5\left[\frac{144(169)}{4}\right]$

$= 2[650] + 5[6084] = 1300 + 30420 = 31720$

b) Resolver $\sum_{i=3}^{6}(2^n + 1)$

$= (2^3 + 1) + (2^4 + 1) + (2^5 + 1) + (2^6 + 1) = 9 + 17 + 33 + 65 = 123$

5.3 Integral de Riemann

La integral de Riemann, creada por Georg Friedrich Bernhard Riemann, fue la primera definición de la integral. La cual se basa en la medición de área debajo de una figura amorfa, midiendo "*n*" cantidad de áreas en rectángulos, aproximado al infinito para reducir el error en las mediciones por *aproximación*, en un intervalo *[a, b]*, que se realizaban en el apartado *5.1*.

Para una función de variable real se expresa de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x} \qquad (6)$$

Donde:

$$\boldsymbol{\Delta x = \frac{b-a}{n}} \qquad \text{(Expresión (2) del apartado 4.1)}$$

$$\boldsymbol{x_i = a + (\Delta x) i} \qquad (7)$$

Por ejemplo:

a) Determinar el área de la función $f(x) = x^2$, en un intervalo [*0,4*]

Obtener Δx y x_i

$$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}, \qquad x_i = 0 + \frac{4i}{n} = \frac{4i}{n}$$

Notación de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{4i}{n}\right)\frac{4}{n} = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n}^2\right) = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{16i^2}{n^2} = \frac{4}{n}\left[\frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

$$= \frac{4}{n}\left[\frac{16}{n^2}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)\right]$$

Simplificar

$$= \frac{4}{n}\left[\frac{16n}{3} + 8 + \frac{16}{6n}\right] = \overbrace{\frac{64}{3} + \frac{32}{n} + \frac{64}{6n^2}}^{\text{enésima suma de Rieman}}$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{64}{3} + \frac{32}{\infty} + \frac{64}{6(\infty)^2}\right) \qquad \text{Aplicar (6) para obtener el área.}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{64}{3}u^2 = \boldsymbol{21.33\overline{3}\, u^2}$$

Se puede comparar el resultado, con el del apartado *5.1* del ejemplo ***a)***, como al incrementar el número de rectángulos, el área se va aproximando al área real, la cual la integral de Riemann dá de forma más precisa.

b) Determinar el área de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2$, en un intervalo [0,3] sobre el eje x.

Obtener Δx y x_i

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}, \quad x_i = 0 + \frac{3i}{n} = \frac{3i}{n}$$

Notación de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n} = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}[2(\frac{3i}{n})^3 + 3\left(\frac{3i}{n}\right)^2] = \frac{3}{n}[\sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{27i^3}{n^3}\right) + \sum_{i=1}^{n} 3\left(\frac{9i^2}{n^2}\right)]$$

$$= \frac{3}{n}[\frac{54}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{27}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2]$$

$$= \frac{3}{n}\left[\frac{54}{n^3}\left(\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right) + \frac{27}{n^2}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)\right] = \frac{3}{n}\left[\frac{27n}{2} + 27 + \frac{27}{2n} + 9n + \frac{27}{2} + \frac{27}{6n}\right]$$

$$= \frac{3}{n}\left[\frac{45n}{2} + \frac{81}{2} + \frac{18}{n}\right] = \frac{135}{2} + \frac{243}{2n} + \frac{54}{n^2}$$

$$A = \lim_{n\to\infty}(\frac{135}{2} + \frac{243}{2(\infty)} + \frac{54}{(\infty)^2})$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{135}{2}\, u^2 = \mathbf{67.5}\, \boldsymbol{u^2}$$

c) Determinar el **área sobre el eje "*x*"** de la función $f(x) = 3x^2 - 4$, en un intervalo [-*2*,*2*]

Obtener Δx y x_i

$$\Delta x = \frac{2-(-2)}{n} = \frac{4}{n}, \quad x_i = -2 + \frac{4i}{n}$$

Notación de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(-2 + \frac{4i}{n})\,\frac{4}{n} = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[3\left(-2 + \frac{4i}{n}\right)^2 - 4\right]$$

$$= \frac{4}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 3(4 - \frac{16i}{n} + \frac{16i^2}{n^2}\right) - \sum_{i=1}^{n} 4]$$

$$= \frac{4}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 12 - \sum_{i=1}^{n}\frac{48i}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{48i^2}{n^2}\right) - \sum_{i=1}^{n} 4]$$

$$= \frac{4}{n}[\, 12n - \frac{48}{n}\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + \frac{48}{n^2}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) - 4n]$$

$$= \frac{4}{n}[12n - 24n - 24 + 16n + 24 + \frac{8}{n} - 4n]$$

$$= \frac{4}{n}\left[\frac{8}{n}\right] = \frac{32}{n^2}$$

$$\boldsymbol{A} = \lim_{n\to\infty}(\frac{32}{(\infty)^2}) = \mathbf{0}\, \boldsymbol{u^2}$$

Al observar el área del ejemplo ***c)***, al parecer el área obtenida es cero, lo cual nos dá a pensar si realmente debajo de la curva y sobre el eje *x*, no estamos midiendo nada. Por lo tanto, revisaremos el gráfico de la función.

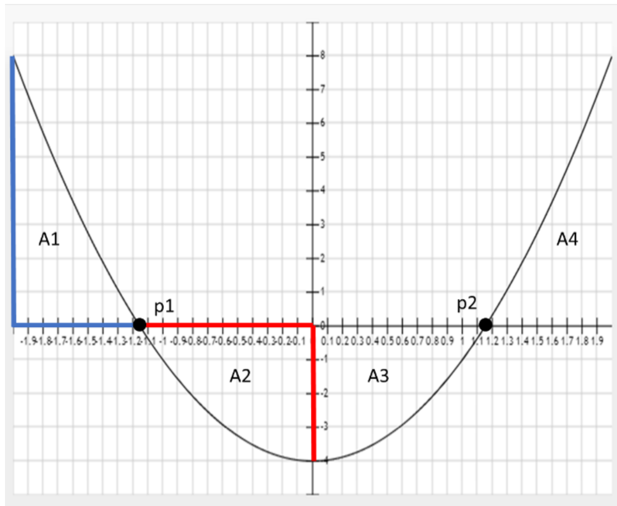


Figura 27. Áreas simétricas de la función

Observando la *figura 27*, llegamos a la conclusión que, el *A1* encerrado en azul es proporcionalmente igual al *A2* encerrado con rojo (matemáticamente en signo negativo) pero debajo del eje *x*, por lo tanto, el área buscada sería $A1 + A4 = A_{Total}$, pero algebraicamente sucede $A1 - A2 - A3 + A4 = 0$, debido a que $A1 = A2 = A3 = A4$. Por esta razón es necesario encontrar las raíces de la función, las cuales indicarán la intersección de la curva con el eje *"x"* en el *p1* y *p2*.

Para obtener las raíces de la función aplicamos la fórmula general

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad (8)$$

Sabemos que los coeficientes de la función son: *a=3, b=0* y *c=-4*, entonces las raíces son:

$$x_1 = \frac{\sqrt{48}}{6} \text{ y } x_2 = \frac{-\sqrt{48}}{6}$$

Cambiando los límites de la función $f(x) = 3x^2 - 4$, en un intervalo de [-2, $\frac{-\sqrt{48}}{6}$], podemos obtener el área $A1 = \frac{16}{9}\sqrt{3} \approx 3.08\, u^2$, evaluando con la integral de Riemann.

Entonces podemos concluir que el área debajo de la curva de la función anterior, evaluada de [*-2,2*] es $A1 + A4 = A_{Total}$, $A_{Total} = \frac{16}{9}\sqrt{3} + \frac{16}{9}\sqrt{3} = \frac{32}{9}\sqrt{3} \approx 6.16\, u^2$

5.4 DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA

Existencia: Si *f(x)* es la razón de cambio de *F(x)*, entonces la integral definida es:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (9)$$

Es decir, que *f(x)* es razón de cambio de *F(x)*, porque la derivada de *F(x)* es *f(x)* y *F(x)* es una primitiva (integral) de *f(x)*, en un intervalo desde "*a*" hasta "*b*" [*a, b*]

Básicamente la integral definida desde [*a, b*] es la definición matemática reducida de la integral de Riemann.

Por ejemplo; comprobar que $f(x) = x^n$ tiene una primitiva (integral) y que su derivada devuelve la misma función.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad su\ derivada: \ \frac{d\frac{1}{n+1}x^{n+1}}{dx} = \frac{n+1}{n+1}x^{n+1-1} = f'(x) = x^n$$

Ahora probaremos que: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, por medio de la integral de Riemann, con ***f(x)=x*** y desde [***a, b***].

Primero determinamos los valores de Δx y x_i.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad y \quad x_i = a + (\Delta x)i$$

Función f(x)

Por lo tanto:

Sustitución de la función f(x)=x

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x}_{\text{Notación de Rieman}} = \sum_{i=1}^{n} f(a + \Delta xi)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}(a + \Delta$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(a\Delta x + \Delta x^2 i) = \sum_{i=1}^{n} a\Delta x + \sum_{i=1}^{n} \Delta x^2 i$$

$$= a\Delta x \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x^2 \sum_{i=1}^{n} i = a\Delta xn + \Delta x^2\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)$$

Sustituir $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y dividir la *"n"*

$$= an\left(\frac{b-a}{n}\right) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)$$

$$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)$$

$$= ab - a^2 + (b^2 - 2ab + a^2)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)$$

Obtener el límite cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a + \Delta xi)\Delta x = ab - a^2 + (b^2 - 2ab + a^2)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(\infty)}\right)$$

$$= ab - a^2 + \frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$ Por lo tanto,

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \qquad \mathbf{(10)}$$

Ahora aplicamos la formula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, con limites [*a, b*], determinada por (9)

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$

Si, decimos que ***n=1***, entonces:

$$\int_a^b \boldsymbol{x^n dx} = \frac{\boldsymbol{b^2}}{2} - \frac{\boldsymbol{a^2}}{2} \qquad (11)$$

Como se puede observar (10) y (11) son iguales, por lo tanto, podemos concluir que la definición de existencia es comprobable y correcta.

4.5 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Una función *f(x)* y un intervalo [*a, b*], es una integral definida que puede calcular el área limitada por su gráfica en *f(x)* y verticalmente por las abscisas con *x=a* y *x=b*. Por lo tanto, la integral definida se representa como:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Donde:

$\int$ =Símbolo de la integral.

a= límite inferior.

b= límite superior.

f(x)= Función a integrar o integrando.

dx= Diferencial, indica la variable que se utiliza.

1- Si se permutan los límites, la **integral** cambia de signo.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (1.g)$$

2- Si los límites son iguales, la **integral es cero**.

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad (1.h)$$

3- Dado tres números reales como *a<b<c*, entonces se integra a trozos la misma función.

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \qquad (1.i)$$

4- Cuando se suman o se restan dos o más funciones como integrando, se utilizan los mismos límites en dos o más integrales separadas.

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \qquad (1.j)$$

5- Si la integral definida es una constante, el resultado es sólo el límite superior menos el inferior todo por la constante.

$\int_a^b cdx = c(b-a)$ *(1.k)*

6- El producto de una constante por una integral ocasiona que la constante salga de la integral.

$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ *(1.l)*

5.6 CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

Si *F* es una primitiva (función integrada) de la función continua (en su gráfica forma una curva suave) *f* en el intervalo [*a, b*], entonces.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

El teorema anterior fue comprobado en el apartado 4.4 en la ecuación (10) con una *f(x)=x*, aplicando la integral de Riemann, por lo tanto, la definición implica:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Tomando como referencia (9), y si omitimos los límites superior e inferior obtenemos:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Donde:

F(x) es la primitiva de *f(x)* y *c* es la constante de integración.

Por ejemplo:

a) Integrar la siguiente función $f(x) = x^2$ en [*0, 4*].

$\int_0^4 x^2dx$

Aplicar: $\int \boldsymbol{x^n dx} = \frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{c}$ (12)

NOTA: Tener en cuenta que en la integral definida no se toma en cuenta la constante de integración *"c"*.

Con *n=2*

$\int_0^4 x^2dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^4 = \frac{x^3}{3}\Big|_0^4$

$\int_0^4 x^2dx = \frac{(4)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{64}{3} \approx 21.33$

Comparado con el resultado evaluado con suma de Riemann en el ejemplo a) del apartado 4.3, observamos que la integral da un resultado preciso.

b) Integrar y aplicar $\int \frac{dv}{v} = \boldsymbol{In\, v + c}$ (13)

$\int_1^2 \frac{dx}{x} = In\, x|_1^2 = In(2) - In\,(1) \approx 0.69$

c) Integrar y aplicar $\int \boldsymbol{\cos v\, dv = sen\, v + c}$ (14)

$\int_0^\pi \cos x\, dx = sen\, x|_0^\pi = sen\,(\pi) - sen(0) = 0$

NOTA: Como los límites están expresados en radianes, el $sen\,(\pi) = 0$ (verificar en calculadora científica)

d) Integrar y aplicar (12)

$$\int_1^9 \sqrt{x}dx = \int_1^9 x^{1/2}dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}\Big|_1^9 = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\Big|_1^9 = \frac{2\sqrt{(9)^3}}{3} - \frac{2\sqrt{(1)^3}}{3}$$

$$\int_1^9 \sqrt{x}dx \approx 17.33$$

e) Integrar:

$\int_2^4 (x^4 + x^3 - x^2)dx$ Aplicar *propiedad (1.j)*

$\int_2^4 x^4 dx + \int_2^4 x^3 dx - \int_2^4 x^2 dx$ Integrar con (12)

$$= \frac{x^{4+1}}{4+1} + \frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{x^{2+1}}{2+1}\Big|_2^4 = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\Big|_2^4$$

$$= \frac{(4)^5}{5} + \frac{(4)^4}{4} - \frac{(4)^3}{3} - [\frac{(2)^5}{5} + \frac{(2)^4}{4} - \frac{(2)^3}{3}]$$

$$= \frac{1024}{5} + 64 - \frac{64}{3} - \frac{32}{5} - 4 + \frac{8}{3} = \frac{3596}{15} \approx 239.7$$

No hay nada secreto que no llegue a descubrirse,
ni nada escondido que no llegue a saberse.
Apostol Mateo

CAPÍTULO 6. INTEGRAL INDEFINIDA Y SUS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.

En este apartado seguiremos estudiando las integrales, este capítulo se enfocará en el desarrollo y métodos de integrales indefinidas. Teniendo como fundamento que todos hemos practicado operaciones inversas, como adición y sustracción, multiplicación y división, elevar potencia y obtener raíz. En el cálculo diferencial se aprendió a realizar derivadas de una función *f(x)*; los problemas de cálculo integral son la operación inversa de *f(x)*, llegando a obtener *F(x)*, la cual es una integral.

6.1 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

1) Si las funciones *f(x)* y *g(x)*, se pueden integrar respectivamente, entonces $f(x) \pm g(x)$ son integrales *F(x)* $\pm$ *G(x)*.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Los signos $\pm$ admiten que la integral se puede separar en dos más integrales, ya sea sumando o restando.

2) Si *f(x)* se puede integrar y *k* es una constante que pertenece a los números reales ($k \in R$), la función *kf(x)* tiene una integral *kF(x)*

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x)$

6.2 CÁLCULO DE INTEGRALES DIRECTAS

Las integrales directas son resultados de aplicar *casi* de forma inmediata las fórmulas de integración y así, llegar al resultado; en algunas ocasiones será necesario adecuar el integrando para que este quede expedito a ser integrado, ya sea aplicando álgebra, alguna propiedad o bien alguna identidad trigonométrica.

Por ejemplo:

a) Integrar $\int 2xdx$ Aplicar propiedad (2) y fórmula (12)

$=2\int xdx = 2\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) = 2\frac{x^2}{2} = x^2 + c$

b) Integrar $\int(\cos x - 3sen\ x + 5)dx$ Aplicar *propiedad (1) y (2)*

$\int \cos x\ dx - 3\int senxdx + 5\int dx$

$=senx - 3(-\cos x) + 5(x) = senx + 3cosx\ + 5x + c$

Aplicar fórmula (14) y:

$$\int \boldsymbol{senvdv = -cosv + c} \qquad (15)$$

$$\int \boldsymbol{dx = x + c} \qquad (16)$$

c) Integrar $\int(\frac{6x^4+3x^2+3}{3x^3})\ dx$ Adecuar el integrando con el común divisor

$\int\left(\frac{6x^4}{3x^3} + \frac{3x^2}{3x^3} + \frac{3}{3x^3}\right)dx$

Dividir té propiedac Aplicar (12) y (13). En $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx$

$= \int 2xdx + \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^3}$

$= \frac{2x^{1+1}}{1+1} + In\ x + \frac{x^{-3+1}}{-3+1}$

$=\frac{2x^2}{2} + In\ x + \frac{x^{-2}}{-2} = x^2 + In\ x - \frac{1}{2x^2} + c$

d) Integrar $\int \sqrt{x}(x^2 - 2)dx$ Adecuar el integrando multiplicando $\sqrt{x} = x^{1/2}$por cada elemento dentro del paréntesis

$\int\left(x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx -$

$2\int x^{\frac{1}{2}}dx$ Aplicar (12)

$=\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\left(\frac{5}{2}\right)+1} - \frac{2x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{x^7}}{7} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + c$

e) Integrar $\int \frac{sen\ x}{cos^2x}\ dx$ Adecuar el integrando y aplicar identidades trigonométricas

$\int \frac{sen\ x}{\cos x}.\frac{1}{\cos x}\ dx = \int \tan x \sec x\ dx = \sec v + c$

Identidades aplicadas: $\boldsymbol{tanx} = \frac{\boldsymbol{senx}}{\boldsymbol{cosx}}$ y $\boldsymbol{secx} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{cosx}}$

$$\int \boldsymbol{\tan v \sec v\ dv = \sec v + c} \qquad (17)$$

f) Integrar $\int \frac{dx}{x^2-10}$ Determinar $a^2\ = 10\ y\ a = \sqrt{10}$, utilizar la fórmula

$$\int \boldsymbol{\frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right| + c} \qquad (18)$$

$=\frac{1}{2\sqrt{10}}\ In\ \left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right| + c$

g) Integrar $\int \frac{dx}{x^2+10}$ Determinar $a^2\ = 10\ y\ a = \sqrt{10}$, utilizar la fórmula

$$\int \boldsymbol{\frac{dx}{v^2+a^2} = \frac{1}{a} arctan\frac{v}{a} + c} \qquad (19)$$

$=\frac{1}{\sqrt{10}}\ arc\tan\frac{x}{\sqrt{10}} + c$

6.3 INTEGRALES POR CAMBIO DE VARIABLE

En algunos casos en los cuales la integral no se puede realizar de forma inmediata, se tiene que realizar un cambio de variable, también llamado sustitución, y después aplicar alguna fórmula para integrar. *Al final el resultado debe quedar expresado con la variable inicial*.

Por ejemplo:

a) Integrar $\int \sqrt{3x-2}\, dx = \int (3x-2)^{\frac{1}{2}} dx$

v= 3x-2 La nueva variable introducida es *"v= 3x-2"*, sin tomar en cuenta la potencia exterior "*1/2*" o bien la que se considera la función más compleja en la mayoría de los casos.

dv= 3dx Obtener el diferencial derivando la función, despejando siempre la constante con todo y signo del segundo término hacia el primer término.

$\boldsymbol{\frac{dv}{3} = dx}$

Realizar el cambio de variable.

En este paso se cambia la variable *"v"* por el valor asignado inicialmente

$$\int v^{\frac{1}{2}} \frac{dv}{3} = \frac{1}{3}\int v^{\frac{1}{2}} dv = \frac{1}{3}\frac{v^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}\frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{v^3}}{9} = \frac{\sqrt{(3x-2)^3}}{9} + c$$

b) Integrar $\int \frac{x\, dx}{x^2+3}$

$v = x^2 + 3$

$dv = 2x\, dx$

$\frac{dv}{2} = x\, dx$

NOTA: Puedes observar que, al obtener el diferencial, la integral se complementa con *"xdx"*, por consiguiente, es factible realizar el cambio de variable.

$\int \frac{dv}{2v} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} In|\, x^2 + 3| + c$ Aplicar (13)

c) Integrar $\int \cos 3\theta d\theta$

$v = 3\theta$

$dv = 3d\theta$

$\frac{dv}{3} = d\theta$

Al aplicar (15) se puede observar claramente que, *"v"* está entre el *cos* y el *dv* y en este caso es igual a 3θ

Realizar el cambio de variable, aplicando (14)

$\int \cos v \frac{dv}{3} = \frac{1}{3}\int \cos v\, dv = \frac{1}{3} sen\, v = \frac{1}{3} sen\, 3\theta + c$

d) Integrar $\int x \cot(x^2+5)dx$

$v = x^2 + 5$

$dv = 2x\, dx$

$\frac{dv}{2} = xdx$

Fórmula $\int \boldsymbol{\cot vdv = ln|senv| + c}$ (20)

Realizar el cambio de variable y aplicar (20)

$\int \cot v \frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int \cot v\, dv = \frac{1}{2} In\,|sen\, v| = \frac{1}{2}\, In\,|\, sen(x^2+5)| + c$

NOTA: Ya pudiste observar que, el método requiere cambiar la variable de la integral original a una nueva variable y complementar los elementos que falten con el diferencial. En caso de NO complementar con el diferencial, buscar la varibale que falte en *"v"*

e) Integrar $\int x\sqrt{x+1}dx = \int x(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$v = x + 1 \quad \rightarrow despejar\ "x" \qquad x = v - 1$

$dv = dx$

Realizar el cambio de variable y aplicar (13)

$\int (v-1)v^{\frac{1}{2}}dx = \int (v^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{1}{2}})dx = \int v^{\frac{3}{2}}dx - \int v^{\frac{1}{2}}dx = \frac{v^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{v^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$

$= \frac{v^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{v^5}}{5} - \frac{2\sqrt{v^3}}{3} = \frac{2\sqrt{(x+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} + c$

f) Integrar $\int \frac{3xdx}{\sqrt[3]{x^2+2}} = \int \frac{3xdx}{(x^2+2)^{\frac{1}{3}}}$

$v = x^2 + 2$

$dv = 2xdx$

$\frac{dv}{2} = xdx$

$\int \frac{3dv}{2v^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2}\int v^{-\frac{1}{3}}dv = \frac{3}{2}\frac{v^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{2}\frac{v^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{4}v^{\frac{2}{3}} = \frac{9\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}{4} + c$

g) Integrar $\int e^{kx}dx$ Con k como constante arbitraria

$v = kx$

$dv = kdx$

$\frac{dv}{k} = dx$

Fórmula $\int \boldsymbol{e^{v}dv = e^{v} + c}$ (21)

$\int \frac{e^{v}dv}{k} = \frac{1}{k}\int e^{v}dv = \frac{e^{v}}{k} = \frac{e^{kx}}{k} + c$

h) Integrar $\int x^{2}sen\,(x^{3}+1)dx$

$v = x^{3} + 1$

$dv = 3x^{2}dx$

$\frac{dv}{3} = x^{2}dx$

$\int sen\,v\frac{dv}{3} = \frac{1}{3}\int sen\,v\,dv = -\frac{1}{3}\cos v = -\frac{\cos(x^{3}+1)}{3} + c$

6.4 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

En este apartado se integrarán funciones trigonométricas que no son inmediatas, por lo tanto, habrá que realizar algunas adecuaciones, así, que es necesario que tengas en cuenta las identidades trigonométricas, las cuales las puedes encontrar en el anexo 1.

Por ejemplo:

a) Integrar $\int \cos^{3}xdx$

Separar la función y aplicar $\boldsymbol{cos^{2}x = 1 - sen^{2}x}$

$\int \cos^{2}x.\cos x\,dx = \int(1 - sen^{2}x)\cos xdx = \int cosx\,dx - \int sen^{2}x\cos xdx$

NOTA: Se pueden observar que se tienen dos integrales, la primera se resuelve de forma inmediata y en la segunda se debe aplicar cambio de variable; tomando a $\boldsymbol{v = senx}$, para que, su diferencial complemente la integral.

$v = senx$

$dv = cosxdx$

Resolver la integral inmediata y para la segunda integral realizar el cambio de variable.

$= sen\,x - \int v^{2}dv = sen\,x - \frac{v^{2+1}}{2+1} = sen\,x - \frac{v^{3}}{3} = sen\,x - \frac{sen^{3}x}{3} + c$

b) Integrar $\int \cos^3 8x \, sen\, 8x \, dx$

$v = \cos 8x$

$dv = -8sen\, 8x\, dx$

$-\frac{dv}{8} = sen\, 8x\, dx$

$\int v^3 \left(-\frac{dv}{8}\right) = -\frac{1}{8}\int v^3 dv = -\frac{1}{8}\frac{v^{3+1}}{3+1} = -\frac{1}{8}\frac{v^4}{4} = \frac{-\cos^4 8x}{32} + c$

c) $\int sen^2 x \cos^3 x\, dx = \int sen^2 x \cos^2 x\, cosx\, dx$

$\int sen^2 x\,(1 - sen^2 x) \cos x\, dx = \int sen^2 x\, cosx\, dx - \int sen^4 x \cos x\, dx$

$v = senx$

$dv = cosx\, dx$

$\int v^2 dv - \int v^4 dv = \frac{v^{2+1}}{2+1} - \frac{v^{4+1}}{4+1} = \frac{v^3}{3} - \frac{v^5}{5} = \frac{sen^3 x}{3} - \frac{sen^5 x}{5} + c$

d) $\int sen^2 x \cos^5 x\, dx$

$= \int sen^2 x(\cos^2 x)^2\, cosx\, dx = \int sen^2 x(1 - sen^2 x)^2\, cosx\, dx$

$= \int sen^2 x(1 - 2sen^2 x + sen^4 x) cosx\, dx$

$= \int sen^2 x\, cosx\, dx - 2\int sen^4 x cosx\, dx + \int sen^6 x\, cosx\, dx$

$v = senx$

$dv = cosxdx$

$\int v^2 dv - 2\int v^4 dv + \int v^6 dv = \frac{v^{2+1}}{2+1} - 2\frac{v^{4+1}}{4+1} + \frac{v^{6+1}}{6+1} = \frac{v^3}{3} - 2\frac{v^5}{5} + \frac{v^7}{7}$

$= \frac{sen^3 x}{3} - \frac{2sen^5 x}{5} + \frac{sen^7 x}{7} + c$

Hasta aquí haz notado que, cuando alguna de las dos funciones trigonométricas (*seno o coseno*) es impar, en la descomposición una de ellas queda elevada a la potencia *"uno"*, para que ésta sea completada en el diferencial de la que se postula como *"v"*. Las identidades que se ocupan son:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{cos^2 x = 1 - sen^2 x} \\ \boldsymbol{sen^2 x = 1 - cos^2 x} \end{aligned}\right\} \textit{Relación Pitagórica}$$

A continuación, se estudiarán otras integrales, donde se aplicarán otras identidades trigonométricas para facilitar la solución.

e) $\int \cos^4 x\, dx$

Aplicar identidad trigonométrica para *la reducción de exponente:*

$$\boldsymbol{cos^2x = \frac{1}{2} + \frac{cos2x}{2}}$$

$$\int [cos^2x]^2 dx = \int \left[\frac{1+\cos 2x}{2}\right]^2 \, dx = \int$$

Se *extrae* el *4* del denominador y se vuelve a aplicar la misma identidad

$$= \frac{1}{4}\int \left[1 + 2cos2x + \frac{1}{2} + \frac{cos4x}{2}\right] dx = \frac{1}{4}\int [\frac{3}{2} + 2cos2x + \frac{cos4x}{2}] \, dx$$

$$= \frac{1}{4}[\frac{3}{2}\int dx + 2\int cos2xdx + \frac{1}{2}\int cos4x \, dx = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x + 2\frac{sen2x}{2} + \frac{1}{2}\frac{sen4x}{4}\right]$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{sen2x}{4} + \frac{sen4x}{32} + c$$

f) $\int sen\, \underset{m}{4x} \cos \underset{n}{6x} \, dx$ Para este tipo de integral, será útil la siguiente identidad para *transformar productos en sumas*:

$$\boldsymbol{senmx.cosnx = \frac{1}{2}sen(m-n)x + \frac{1}{2}sen(m+n)x}$$

$$\int \left(\frac{1}{2}sen\,(4-6)x + \frac{1}{2}sen(4+6)x\right) dx = \frac{1}{2}\int sen(-2x)dx + \frac{1}{2}\int sen10x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\cos(-2x)}{-2} - \frac{1}{2}\frac{cos10x}{10} = \frac{\cos(-2x)}{4} - \frac{cos10x}{20} + c$$

g) $\int \sec^4 xdx$ Aplicar identidad $\boldsymbol{sec^2x = tan^2x + 1}$

$$= \int \sec^2 x \sec^2 xdx = \int (\tan^2 x + 1) \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x + \int \sec^2 x \, dx$$

$v = tanx$

$dv = sec^2xdx$

La primera integral se resolverá por cambio de variable y la segunda de forma inmediata con (22)

Fórmula $\int \boldsymbol{sec^2vdv = tanv + c}$ (22)

$$\int v^2dv + tanx = \frac{v^3}{3} + tanx = \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + c$$

h) $\int tan^3 x \, sec^5 xdx$ Aplicar identidad: $\boldsymbol{tan^2x = sec^2x - 1}$

$$\int tan^2 x \, sec^4 x \, sec\, x \, tanx \, dx = \int (sec^2 x - 1)sec^4x \, secx \, tan \;\, x \, dx$$

$$= \int sec^6 x \, sec\, x \, tan\, x \, dx - \int sec^4 x \, sec\, x \, tan\, x \, dx$$

$v = sec\, x$

$dv = secx \, tanx \, dx$

$$\int v^6dv - \int v^4dv = \frac{v^7}{7} - \frac{v^5}{5} = \frac{sec^7 x}{7} - \frac{sec^5 x}{5} + c$$

i) $\int cos4x \cos 3x\, dx$

Aplicar identidad: $\boldsymbol{\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\cos(m-n)x + \frac{1}{2}\cos(m+n)x}$

$= \int (\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}cos7x)dx = \frac{1}{2}\int \cos xdx + \frac{1}{2}\int \cos 7x\, dx$

$=\frac{1}{2}sen\, x + \frac{1}{2}\frac{sen7x}{7} = \frac{1}{2}sen\, x + \frac{1}{14}sen\, 7x + c$

j) Integrar: $\int sen^2 ax \cos^2 ax\, dx$

Aplicar identidad: $\boldsymbol{sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}}$ y $\boldsymbol{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}}$

$=\int [\frac{1-\cos\ a2x}{2}.\frac{1+\cos a2x}{2}]dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2ax)dx$

$=\frac{1}{4}\int (1-\frac{1}{2}-\frac{\cos 4ax}{2})dx = \frac{1}{4}[\frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4ax\, dx]$

$=\frac{1}{4}\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{sen\ 4ax}{4a}\right] = \frac{x}{8} - \frac{sen\ 4ax}{32a} + C$

6.5 INTEGRACIÓN POR PARTES

El método de integración por partes, es la regla correspondiente al producto de dos funciones. La expresión es la siguiente:

$$\boldsymbol{\int udv = uv - \int v\, du} \qquad (23)$$

El propósito es deducir una integral más simple que aquella con la cual se inició. Hay que tener en consideración las siguientes observaciones.

1) La parte escogida como "*u*" debe ser la función más simple y ésta se va a derivar para obtener *"du"*
2) Para escoger "*u*" se *sugiere* el siguiente orden de las funciones "**ILATE**"

Tipo de funciones				
Inversa	**L**ogarítmica	**A**lgebraica	**T**rigonométrica	**E**xponencial

3) La parte escogida como "*dv*" ha de ser fácil de integrar, para obtener *"v"*
4) La integral $\int vdu$ no debe ser más complicada que $\int udv$
5) Si la integral se vuelve cíclica, se debe realizar una igualación.

Por ejemplo:

a) $\int x\, cosx\, dx$

$u = x$ $\quad\quad$ $dv = cosxdx$

$du = dx$ $\quad\quad$ $v = senx$

NOTA: de "u" a "du" se **deriva** y de "dv" a "v" se **integra**.

Aplicar (23), integración por partes.

$= x\, sen\, x - \int sen\, x\, dx = x\, senx + cosx + c$

b) $\int e^x(x^2 + 2)\, dx$

$u = x^2 + 2 \qquad dv = e^x\, dx$

$du = 2xdx \qquad v = e^x$

Se crea una segunda integral por partes que se tiene que desarrollar.

$= (x^2 + 2)e^x - \int e^x 2x\, dx$

$u = x \qquad dv = e^x\, dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

$= (x^2 + 2)e^x - 2[xe^x - \int e^x dx]$

$= (x^2 + 2)e^x - 2xe^x + 2e^x + c = e^x[(x^2 + 2) - 2x + 2]$

$= e^x[x^2 - 2x + 4] + c$

c) $\int arc\cot(x)\, dx$

$u = arc\cot(x) \qquad dv = dx$

$du = -\frac{dx}{1+x^2} \qquad v = x$

$= [arc\cot(x)]x - \int x\left(-\frac{dx}{1+x^2}\right)$

Renombramos la primera sección con “**B**” p... mismo elen...

$= \underbrace{B + \qquad}_{\mathbf{B}} \int \frac{xdx}{1+x^2}$

Reordenamos la segunda integral y la resolvemos por cambio de variable.

$v = 1 + x^2$

$dv = 2xdx$

$\frac{dv}{2} = xdx$

$= B + \int \frac{dv}{v} = B + \frac{1}{2}\ln v$

$= x(arc\cot\, x) + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c$

d) $\int lnxdx$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{dx}{x}$ $\qquad v = x$

$= (\ln x)x - \int \frac{xdx}{x} = xln\,x - \int dx = xln\,x - x + c$

e) $\int x\, lnxdx$

Dividir las "x" de la integral

$u = \ln x \qquad dv = xdx$

$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$= (\ln x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{2*2} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c$

Como puedes observar, entre los resultados del ejercicio **d)** y **e)** se forma un patrón, de tal forma que, si integramos función x^n multiplicando por una función $\ln x$, los resultados solo seguirán un parámetro, por lo tanto, se puede deducir una expresión para: $\int x^2 \ln x dx$.

f) $\int x^n \ln x\, dx$

$u = \ln x \qquad dv = x^n dx$

$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{dx}{x} = B - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}.x^{-1}\, dx$$

B

$$= B - \frac{1}{n+1}\int x^n\, dx = B - \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} = B - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)} + C$$

Por lo tanto

$$\int \boldsymbol{x^n \ln x\, dx} = \frac{\boldsymbol{x^{n+1}\ln x}}{\boldsymbol{n+1}} - \frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{(n+1)^2}} + \boldsymbol{c} \qquad (24)$$

g) Integrar $\int x^2 ln\, xdx$ utilizando la expresión (24)

$\int x^2 ln\, xdx = \frac{x^{2+1}\ln x}{2+1} - \frac{x^{2+1}}{(2+1)^2} = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$

Integrales por partes cíclicas

En este apartado se estudiarán integrales por partes que al resolverlas se vuelven cíclicas, y será necesario pasar el elemento cíclico del segundo término hacia el primero. Para eso recordaremos como resolver las desigualdades.

Por ejemplo:

$x - 2 > -x + 1$

$x + x > 1 + 2$

$2x > 3$

$x > \frac{3}{2}$

Pasar las *"x"* al primer término y las constantes al segundo término.

a) $\int sec^3\, xdx$

$\int sec^2\, x\, sec\, xdx$

Utilizar identidad: $\boldsymbol{tan^2 x = sec^2 x - 1}$

Fórmulas:

$\int \boldsymbol{sec^2 v dv} = \mathbf{tan}\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{c}$ (22)

$\int \mathbf{sec}\, \boldsymbol{v dv} = \boldsymbol{ln}(\mathbf{sec}\, \boldsymbol{v} + \mathbf{tan}\, \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{c}$ (25)

$u = secx \qquad dv = sec^2 xdx$

$du = sec\, x. tan\, xdx \quad v = \tan x$

$$= \sec x \tan x - \int \tan x \sec x \tan x dx = R - \int tan^2\, x \sec x dx$$

R

$$= R - \int (sec^2 x - 1)\, sec\, xdx = R - \int sec^3\ xdx + \int sec\, xdx$$

NOTA: La integral $\int sec\, xdx$ es inmediata y se aplica (25), en la integral $\int sec^3\ xdx$ es donde se realiza el procedimiento mostrado al inicio del tema.

$\int sec^3\ xdx\ = R - \int sec^3\ xdx\ + ln|\, sec\, x + tan\, x|$

Aquí iniciamos

Despejar hacia el primer término

B

$\int sec^3\, xdx\ + \int sec^3\ xdx = R + B$

$2 \int sec^5\ xdx = R + B$

$\int sec^3\, xdx = \frac{1}{2} R + \frac{1}{2} B$

Por lo tanto, el resultado final es el siguiente

$\int sec^3\, xdx = \frac{1}{2} sec\, x\ \ tan\, x\ + \frac{1}{2}\ ln\, |sec\, x + tan\, x| + c$

b) Integrar por partes: $\int e^{-ax}\ \cos bx\ dx$

$u = e^{-ax} \qquad\qquad dv = cos\ bx\ dx$

$$du = -ae^{-ax}dx \qquad v = \frac{sen\, bx}{b}$$

$$= \underbrace{e^{-ax}\frac{sen\, bx}{b}}_{\mathbf{B}} - \int \frac{sen\, bx}{b}(-ae^{-ax})dx$$

$$= B + \qquad \frac{a}{b}\int e^{-ax}\, sen\, b\, dx$$

$$u = e^{-ax} \qquad dv = sen\, bx\, dx$$

$$du = -ae^{-ax}dx \qquad v = -\frac{\cos bx}{b}$$

$$= B + \frac{a}{b}\left[e^{-ax}\left(\frac{-\cos bx}{b}\right) - \int \frac{-\cos bx}{b}(-ae^{-ax})\, dx\right]$$

$$= B - \underbrace{\frac{ae^{-ax}\cos bx}{b^2}}_{\mathbf{R}} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{-ax}\cos bx\, dx$$

Despejar la integral hacia el primer término

$$\int e^{-ax}\cos bx\, dx + \frac{a^2}{b^2}\int e^{-ax}\cos bx\, dx = B - R$$

$$\int e^{-ax}\cos bx\, dx\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) = B - R$$

$$\int e^{-ax}\cos bx\, dx\left(\frac{b^2+a^2}{b^2}\right) = B - R$$

$$\int e^{-ax}\cos bx\, dx = \frac{b^2}{b^2+a^2}(B - R)$$

$$\int e^{-ax}\, cos\, bx\, dx = \frac{b^2}{b^2+a^2}\left(\frac{e^{-ax}\, sen\, bx}{b}\right) - \frac{b^2}{b^2+a^2}\left(\frac{ae^{-ax}\, cos\, bx}{b^2}\right)$$

$$\int e^{-ax}\, cos\, bx\, dx = \frac{be^{-ax}\, sen\, bx}{b^2+a^2} - \frac{ae^{-ax}\, cos\, bx}{b^2+a^2} + c$$

c) Integrar por partes: $\int \frac{\ln x}{x}dx$

$$u = \ln x \qquad dv = \frac{dx}{x}$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \ln x$$

$$= \ln x \ln x - \int \ln x \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx = ln^2 x$$

$$2\int \frac{\ln x}{x}dx = ln^2 x$$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}ln^2 x + c$$

NOTA: Este ejemplo fue sólo para prácticar integrales cíclicas, pero puede resolverse por el método de cambio de varible.

6.6 INTEGRALES POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Este método de integración es útil cuando el integrando presenta expresiones de la siguiente forma:

$\sqrt{a^2-v^2}$, $\sqrt{a^2+v^2}$ ó $\sqrt{v^2-a^2}$; donde *a>0* y *"v"* es función de *"x"*

Para integrar se debe buscar eliminar el radical, realizando la sustitución trigonométrica necesaria; para obtener un integrando con función trigonométrica con respecto a una nueva variable (un ángulo θ) para ello es necesario considerar las tablas 1 y 2. La tabla 1, ayudará a realizar la sustitución trigonométrica; la tabla 2, ayudará a dejar el resultado final expresado en la variable inicial *"x"*. Es necesario tener en cuenta el triángulo rectángulo de la *figura 28* y el teorema de Pitágoras.

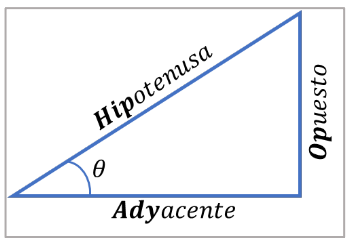


Figura 28. Triángulo rectángulo

Tabla 1. Formas para realizar la sustitución

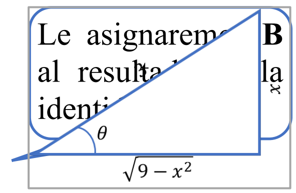
Caso	Cuando aparece	Sustituir	Identidad Trigonométrica
1	$\sqrt{a^2-v^2}$	$x = a\,sen\theta$	$1 - sen^2\theta = cos^2\theta$
2	$\sqrt{a^2+v^2}$	$x = a\,tan\theta$	$1 + tan^2\theta = sec^2\theta$
3	$\sqrt{v^2-a^2}$	$x = a\,sec\theta$	$sec^2\theta - 1 = tan^2\theta$

Tabla 2. Razones trigonométricas

$sen\theta = \dfrac{Op}{Hip}$	$csc\theta = \dfrac{Hip}{Op}$
$cos\theta = \dfrac{Ady}{Hip}$	$sec\theta = \dfrac{Hip}{Ady}$
$tan\theta = \dfrac{Op}{Ady}$	$cot\theta = \dfrac{Ady}{Op}$

En el desarrollo de los ejemplos se darán algunas notas importantes para resolver los ejercicios.

a) Integrar por sustitución trigonométrica: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$



Observando el radical $\sqrt{9-x^2}$, tomaremos el caso *1*

$\boldsymbol{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\quad \boldsymbol{x = a\, sen\, \theta}$, $\quad \boldsymbol{1 - sen^2\theta = \cos^2\theta}$

Obtener los elementos para realizar la sustitución trigonométrica

$\boldsymbol{a} = 3$

$a^2 = 9$

$x = 3sen\theta$

$x^2 = 9sen^2\theta$

$dx = 3cos\theta d\theta$

NOTA: Se desarrollará el radical para obtener su sustitución trigonométrica; pero, se puede reducir dicho procedimiento de la siguiente forma: $\sqrt{a^2 \pm v^2}$ = valor de *"a"* multiplicado por el valor **B**, sin ser elevado al cuadrado. $\sqrt{a^2 \pm v^2} = \boldsymbol{aB}$

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9sen^2\theta} = \sqrt{9(1-sen^2\theta)} = \sqrt{9cos^2\theta} = \boldsymbol{3cos\theta}$$

Realizar la sustitución trigonométrica

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3cos\theta\, d\theta}{9sen^2\theta\, 3cos\theta} = \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{sen^2\theta}$$

Aplicar identidad trigonométrica

$\boldsymbol{\csc x = \frac{1}{sen\, x}}$ ⋙ elevar al cuadrado $\boldsymbol{\csc^2 x = \frac{1}{sen^2\, x}}$

$\frac{1}{9}\int \csc^2\theta\, d\theta$ Fórmula $\int \boldsymbol{csc^2 v\, dv = -cotv + c}$ (26)

$= -\frac{1}{9}\cot\theta + c$ ⋙ Resultado parcial por estar expresado con respecto a *"θ"*

Para obtener el resultado final es necesario expresarlo con respecto a la variable inicial *"x"*; para ello se tiene que buscar su valor en: $x = 3sen\theta$.

Despejar la función trigonométrica y revisar la tabla 2, para obtener la razón trigonométrica de la función del *seno*.

$sen\theta = \frac{x}{3} = \frac{Op}{Hip}$

Aplicar el teorema de Pitágoras para obtener el cateto faltante

$H^2 = O^2 + A^2$ ⋙ Despejar adyacente $A = \sqrt{H^2 - O^2}$

Entonces el cateto faltante es $A = \sqrt{(3)^2 - (x)^2} = \sqrt{9 - x^2}$

NOTA: Una forma sencilla de dar valor al cateto faltante, es colocar el radical que se tiene en la integral inicial.

Ya que se tienen los tres valores del triángulo rectángulo se puede llegar al resultado final, verificando en la tabla 2, la "$cot\theta = Ady/Op$"

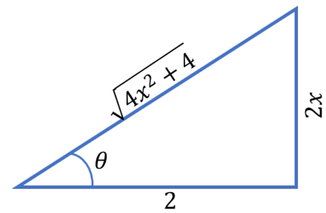
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{9}\int \csc^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{9}\cot\theta + c \; = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c$$

Para el siguiente ejemplo sólo se llevará a cabo el procedimiento parecido al anterior sin que estos sean especificados.

b) Integrar por sustitución trigonométrica: $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4}}$

Utilizar:

$\boldsymbol{\sqrt{a^2+v^2}}$, $\boldsymbol{x = a\tan\theta}$, $\boldsymbol{1 + tan^2\ \theta = sec^2\,\theta}$



$a = 2$

$a^2 = 4$

$2x = 2\tan\ \theta \quad \ggg \quad x = \tan\theta$

$4x^2 = 4\, tan^2\theta \quad \ggg \quad x^2 = tan^2\,\theta$

$dx = sec^2\,\theta\; d\,\theta$

$\sqrt{4x^2+4} = 2\sec\ \theta$

Realizar la sustitución trigonométrica

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4}} \;=\; \int \frac{sec^2\,\theta\; d\,\theta}{2\sec\theta} \;=\; \frac{1}{2}\int \sec\ \theta\ d\ \theta$$

Aplicar la fórmula (25)

$$= \frac{1}{2}\ln\,|\underbrace{\sec\theta}_{\frac{Hip}{Ady}} + \underbrace{\tan\theta}_{\frac{Op}{Ady}}| + c$$

Resultado parcial, por estar expresado con respecto a un ángulo, se debe cambiar a *"x"*

Resolver el triángulo

$tan\theta = \frac{2x}{2} = \frac{Op}{Ady}$ *, por lo tanto*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4}} \;=\; \frac{1}{2}\, ln\, \left| \frac{\sqrt{4x^2+4}}{2} + x \right| + c$$

c) Integrar por sustitución trigonométrica: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-8}}$

Utilizar:

$\sqrt{v^2 - a^2}$, $\quad x = asec\theta, \quad sec^2\theta - 1 = tan^2\theta$

$a = \sqrt{8}$

$a^2 = 8$

$x = \sqrt{8}\sec\theta$

$\sqrt{x^2 - 8} = \sqrt{8}\tan\theta$

Realizar la sustitución trigonométrica

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-8}} = \int x = \frac{\sqrt{8}\sec\theta\tan\theta\, d\,\theta}{\sqrt{8}\sec\theta\sqrt{8}\tan\theta} = \frac{1}{\sqrt{8}}\int d\,\theta = \frac{1}{\sqrt{8}}\ \theta$$

Se puede observar que el resultado está expresado con respecto al ángulo "θ" el cual se puede cambiar a valores en *"x"* despejando "θ" de $x = \sqrt{8}\sec\theta$

$\sec\theta = \frac{x}{\sqrt{8}} \quad \ggg \quad \theta = sec^{-1}\frac{x}{\sqrt{8}}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-8}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\ \theta = \frac{1}{\sqrt{8}}\ sec^{-1}\frac{x}{\sqrt{8}}$$

d) Integrar: $\int \frac{\sqrt{36-x^2}}{x}dx$

$a = 6$

$a^2 = 36$

$x = 6\,sen\,\theta$

$dx = 6\cos\theta d\theta$

$\sqrt{36 - x^2} = 6\cos\theta$

Realizar la sustitución Trigonométrica

$\int \frac{\sqrt{36-x^2}}{x}dx = \int \frac{6\cos\theta 6\cos\theta\, d\theta}{6\,sen\,\theta} = 6\int\frac{cos^2\theta d\theta}{sen\,\theta}$ Identidad $\boldsymbol{cos^2\theta = 1 - sen^2\theta}$

$$= 6\int\frac{(1-sen^2\theta)}{sen\,\theta}d\theta = 6\left[\int\frac{1}{sen\,\theta}d\theta - \int\frac{sen^2\theta}{sen\,\theta}d\theta\right]$$

$$= 6[\int csc\,\theta\, d\theta - \int sen\,\theta\, d\theta] = 6\,ln|csc\,\theta - cot\,\theta| + 6\cos\theta + C$$

Resolver el triángulo

$x = 6\,sen\,\theta \ \ggg\ sen\,\theta = \frac{x}{6} = \frac{Op}{Hip}$

Entonces: $Op = x, Hip = 6\ y\ Ady = \sqrt{36 - x^2};\ csc\theta = \frac{Hip}{Op}, cot\theta = \frac{Ady}{Op}$ y $cos\theta = \frac{Ady}{Hip}$

$\int \frac{\sqrt{36-x^2}}{x} dx = 6 \ln \left| \frac{6}{x} - \frac{\sqrt{36-x^2}}{x} \right| + 6 \frac{\sqrt{36-x^2}}{6} + C$

$= 6 \ln \left| \frac{6-\sqrt{36-x^2}}{x} \right| + \sqrt{36 - x^2} + C$

6.7 INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

El método de integración por fracciones parciales, nos ayuda a resolver integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, donde $P(x) < Q(x)$ y ambos son polinomios. El método requiere factorizar el polinomio $Q(x)$, en factores lineales o cuadráticos, como producto de irreducibles. El objetivo es descomponer en expresiones racionales de sumas más simples.

Factores

Lineales	Cuadráticos
$(x - a)$	$(x^2 + a^2)$
$(ax + b)$	$(x^2 + bx + c)$ Si $b^2 - 4ac$ es negativo

En cuanto se deducen las fracciones parciales, se procede a obtener un sistemas de ecuaciones de acuerdo al número de constantes (A, B, D, E,…),que se tienen, para ello se puede ocupar cualquier método conocido, como sustitución , sumas y restas, Cramer, eliminación Gausiana, Gauss-Jordan, etc.

Se analizan 4 casos.

1.- Factores lineales repetidos

Con una integral de la siguiente forma:

$\int \frac{P(x)dx}{(ax+b)^m+(cx+d)^{n\ldots}}$

La descomposición en fracciones parciales quedaría como:

$\frac{P(x)dx}{(ax+b)^m+(cx+d)^{n\ldots}} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{C}{(ax+b)^m} + \frac{D}{cx+d} + \cdots + \frac{E}{(cx+d)^{n\ldots}}$

Por ejemplo:

Descomponer los siguientes polinomios en fracciones parciales.

$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(3x+2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{3x+2} + \frac{D}{(3x+2)^2} + \frac{E}{(3x+2)^3}$

2.- Factores lineales no repetidos (diferentes)

Con una integral de la siguiente forma:

$$\int \frac{P(x)dx}{(ax+b)(cx+d)(ex+f)\ldots}$$

La descomposición en fracciones parciales quedaría como:

$$\frac{P(x)dx}{(ax+b)(cx+d)(ex+f)\ldots} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d} + \frac{C}{ex+f} + \cdots$$

Por ejemplo:

Descomponer los siguientes polinomios en fracciones parciales.

$$\frac{1}{(x^2-9)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-3)}$$

3.- Factores cuadráticos repetidos (iguales)

Con una integral de la siguiente forma:

$$\int \frac{P(x)dx}{(ax^2+bx+c)^m(dx^2+ex+f)^n}$$

La descomposición en fracciones parciales quedaría como:

$$\frac{P(x)dx}{(ax^2+bx+c)^m(dx^2+ex+f)^n} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^m} + \cdots$$

Por ejemplo:

Descomponer los siguientes polinomios en fracciones parciales.

$$\frac{x^3+x+1}{x^3(x^2+3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+3} + \frac{Fx+G}{(x^2+3)^2}$$

4.- Factores cuadráticos no repetidos (diferentes)

Con una integral de la siguiente forma:

$$\int \frac{P(x)dx}{(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)\ldots}$$

La descomposición en fracciones parciales quedaría como:

$$\frac{P(x)dx}{(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)\ldots} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{dx^2+ex+f} + \cdots$$

Por ejemplo:

Descomponer los siguientes polinomios en fracciones parciales.

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

Caso 1. Factores lineales repetidos (iguales)

a) $\int \frac{2x^2+3x+2}{(x-2)^3}\, dx$

Descomponer en fracciones parciales:

$\frac{2x^2+3x+2}{(x-2)^3} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$

NOTA: En $(x-2)^3$ la potencia es *"3"*, las fracciones posteriores en el denominador se repiten desde *"1"* hasta llegar a *"3"*

Realizar las sumas de fracciones

$\frac{2x^2+3x+2}{(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^2+B(x-2)}{(x-2)(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$

NOTA: $(x-2)(x-2)^2 = (x-2)^3$

$\frac{2x^2+3x+2}{(x-2)^3} = \frac{(x-2)^3[A(x-2)^2+B(x-2)]+C(x-2)^3}{(x-2)^3(x-2)^3}$

$2x^2+3x+2 = \frac{(x-2)^3(x-2)^3[(A(x-2)^2+B(x-2))+C]}{(x-2)^3(x-2)^3}$

$2x^2+3x+2 = A(x-2)^2 + B(x-2) + C$

Desarrollar el binomio cuadrado

$2x^2+3x+2 = A(x^2-4x+4) + B(x-2) + C$

$2x^2+3x+2 = Ax^2 - 4Ax + 4A + Bx - 2B + C$

Agrupar por términos con x^2, x^1 y *constantes*

$2x^2+3x+2 = Ax^2 + x(-4A+B) + (4A-2B+C)$

Igualar coeficientes de ambos términos dependiendo del grado (*potencia*)

$A = 2$

$-4A + B = 3$

$4A - 2B + C = 2$

Resolver el sistema de ecuaciones, por el método que el lector prefiera.

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$-4(2) + B = 3$ $\qquad$ $4(2) - 2(11) + C = 2$

$B = 3 + 8$ $\qquad$ $C = 2 + 22 - 8$

$B = 11$ $\qquad$ $C = 16$

Tenemos *A=2, B=11* y *C=16*

Sustituir los valores de A, B y C en las integrales con fracciones parciales

$\int \frac{2x^2+3x+2}{(x-2)^3} dx = \int \frac{A}{(x-2)} dx + \int \frac{B}{(x-2)^2} dx + \int \frac{C}{(x-2)^3} dx$

$= \int \frac{2}{(x-2)} dx + \int \frac{11}{(x-2)^2} dx + \int \frac{16}{(x-2)^3} dx$

$=2 \ln|x-2| + 11 \int (x-2)^{-2} dx + \int (x-2)^{-3} dx$

$v = x - 2$

$dv = dx$

$= 2 \ln|x-2| + 11 \left(\frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1}\right) + 16 \left(\frac{(x-2)^{-3+1}}{-3+1}\right)$

$= 2 \ln|x-2| - \frac{11}{(x-2)} - \frac{8}{(x-2)^2} = 2 \ln|x-2| + \frac{-11(x-2)^2 - 8(x-2)}{(x-2)(x-2)^2}$

$= 2 \ln|x-2| + \frac{-11(x-2)(x-2) - 8(x-2)}{(x-2)(x-2)^2} = 2 \ln|x-2| + \frac{-11(x-2)-8}{(x-2)^2} + c$

b) Integrar por fracciones parciales: $\int \frac{3x+2}{(x+2)^2} dx$

$\frac{3x+2}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$ Descomposición en fracciones parciales

$\frac{3x+2}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + B(x+2)}{(x+2)(x+2)^2}$

$\frac{3x+2}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)(x+2) + B(x+2)}{(x+2)(x+2)^2}$ Mover $(x+2)^2$ al segundo término

$3x + 2 = \frac{(x+2)^2 (x+2)[A(x+2) + B]}{(x+2)(x+2)^2}$

$3x + 2 = A(x+2) + B$

$3x + 2 = Ax + (2A + B)$

Igualar coeficientes dependiendo del grado, para obtener un sistema de ecuaciones

Ecuaciones	Solución
$A= 3$	$2(3) + B= 2$
$2A+B= 2$	$B= 2-6$
	$B= -4$

Los valores obtenidos son: $A= 3$ y $B=-4$, sustituirlos en las integrales

$\int \frac{3x+2}{(x+2)^2} dx = \int \frac{A}{(x+2)} dx + \int \frac{B}{(x+2)^2} dx$

$\int \frac{3dx}{(x+2)} + \int \frac{-4dx}{(x+2)^2} = 3 \, ln|x+2| - 4 \frac{(x+2)^{-1}}{-1}$

$=3 \, ln|x+2| + \frac{4}{(x+2)} + c$

Caso 2. Factores lineales no repetidos (diferentes)

a) Integrar por fracciones parciales: $\int \frac{2x-1}{x^2+5x+6}\,dx$

Descomponer en fracciones parciales

$\int \frac{2x-1}{x^2+5x+6}\,dx = \frac{2x-1}{(x+3)(x+2)}$

$\frac{2x-1}{(x+3)(x+2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2}$

$\frac{2x-1}{(x+3)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x+3)}{(x+3)(x+2)}$ Mover *(x+3) (x+2)* al segundo término

$2x-1 = \frac{(x+3)(x+2)[Ax+2A+Bx+3B]}{(x+3)(x+2)}$

$2x-1 = x\,(A+B)+(2A+3B)$

Igualar coeficiente dependiendo del grado, para obtener un sistema de ecuaciones

$A+B=2$ Buscar el valor de A y B

$2A+3B=-1$

NOTA: Para resolver los sistemas de ecuaciones puedes ocupar cualquier método conocido. No exclusivamente el que aquí se presenta.

$A=2-B$

$2(2-B)+3B=-1$ Sustituir A en B

$4-2B+3B=-1$

$B=-5$

Entonces: $A=2-(-5)=7;$

Sustituir $A=7$ y $B=-5$ en la integral

$\int \frac{2x+1}{x^2+5x+6}\,dx = \int \frac{A}{x+3}\,dx + \int \frac{B}{x+2}\,dx$

$\int \frac{7\,dx}{x+3} - \int \frac{5\,dx}{x+2} = 7\,ln|x+3| - 5\,ln|x+2| + c$

b) Integrar: $\int \frac{4x+2}{x^2-x}dx$

Descomponer en fracciones parciales

$\int \frac{4x+2}{x^2-x} dx = \frac{4x+2}{x(x-1)}$

$\frac{4x+2}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$

$\frac{4x+2}{x(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x)}{x(x-1)}$ Mover $x(x-1)$ al segundo término

$4x + 2 = \frac{x(x-1)[Ax-A+Bx]}{x(x-1)}$

$4x + 2 = x(A + B) - A$

Igualar coeficiente dependiendo del grado, para obtener un sistema de ecuaciones

Ecuaciones	Buscar los valores de *A* y *B*
$-A = 2$	$A = -2$
$A + B = 4$	$-2 + B = 4$
	$B = 6$

Sustituir *A* y *B* en la integral

$\int \frac{4x+2}{x^2-x}\, dx = \int \frac{A\, dx}{x} + \int \frac{B\, dx}{x-1}$

$\int \frac{-2\, dx}{x} + \int \frac{6\, dx}{x-1} = -2\ln|x| + 6\ln|x-1| + c$

Caso 3. Factores cuadráticos repetidos (iguales)

a) Integrar: $\int \frac{2x^3+2x}{(x^2+9)^2}\, dx$

Descomponer en fracciones parciales

$\int \frac{2x^3+2x}{(x^2+9)^2}\, dx = \frac{2x^3+2x}{(x^2+9)(x^2+9)}$

$\frac{2x^3+2x}{(x^2+9)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+9)} + \frac{Cx+D}{(x^2+9)^2}$ Realizar la suma de fracciones

$\frac{2x^3+2x}{(x^2+9)^2} = \frac{(Ax+B)\left(x^2+9\right)^2+(Cx+D)(x^2+9)}{(x^2+9)(x^2+9)^2}$ Descomponer $(x^2 + 9)^2$

$\frac{2x^3+2x}{(x^2+9)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+9)(x^2+9)+(Cx+D)(x^2+9)}{(x^2+9)(x^2+9)^2}$

$2x^3 + 2x = \frac{(x^2+9)^2(x^2+9)\left[Ax+B(x^2+9)+(Cx+D)\right]}{(x^2+9)(x^2+9)^2}$

$2x^3 + 2x = Ax^3 + 9Ax + Bx^2 + 9B + Cx + D$

$2x^3 + 2x = Ax^3 + Bx^2 + x(9A + C) + (9B + D)$

Igualar coeficientes dependiendo del grado, para obtener un sistema de ecuaciones

Ecuaciones	Buscar A, B, C y D
$A = 2$	$9(2) + C = 2$
$B = 0$	$C = -16$
$9A + C = 2$	$9(0) + D = 0$
$9B + D = 0$	$D = 0$

Los valores obtenidos son *A= 2*, *B= 0*, *C= -16* y *D=0*. Sustituirlos en la integral

$$\int \frac{2x^3+2x}{(x^2+9)^2} = \int \frac{Ax+B}{(x^2+9)} dx + \int \frac{Cx+D}{(x^2+9)^2} dx$$

$$= \int \frac{2x\, dx}{(x^2+9)} - \int \frac{16x\, dx}{(x^2+9)^2}$$

$$v = x^2 + 9$$

$$dv = 2x\, dx$$

$$\int \frac{dv}{v} - \frac{16}{2} \int \frac{dv}{v^2} = \ln v - 8\ \frac{v^{-1}}{-1} = \ln|x^2 + 9| + \frac{8}{(x^2+9)} + c$$

b) Integrar por fracciones parciales: $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x^2+4)^2} dx$

Descomponer en fracciones parciales

$$\int \frac{3x^2+2x-1}{(x^2+4)^2} dx = \frac{Ax+B}{(x^2+4)} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

$$\frac{3x^2+2x-1}{(x^2+4)^2} = \frac{(Ax+B)\left(x^2+4\right)^2 + (Cx+D)(x^2+4)}{(x^2+4)(x^2+4)^2}$$

$$\frac{3x^2+2x-1}{(x^2+4)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+4)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+4)}{(x^2+4)(x^2+4)^2}$$

$$3x^2 + 2x - 1 = \frac{\left(x^2+4\right)^2 (x^2+4)\left[Ax+B\left(x^2+4\right)+(Cx+D)\right]}{(x^2+4)(x^2+4)^2}$$

$$3x^2 + 2x - 1 = Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx + D$$

$$3x^2 + 2x - 1 = Ax^3 + Bx^2 + x(4A + C) + (4B + D)$$

Igualar coeficientes dependiendo del grado, para obtener un sistema de ecuaciones

Ecuaciones	Buscar A, B, C y D	
$A = 0$	$4(0) + C = 2$	$4(3) + D = -1$
$B = 3$	$C = 2$	$D = -13$
$4A + C = 2$		
$4B + D = -1$		

Los valores obtenidos son: *A=0, B=3, C=2* y *D=-13*, sustituirlos en la integral

$$\int \frac{3x^2+2x-1}{(x^2+4)^2}dx = \int \frac{Ax+B}{(x^2+4)}\ dx + \int \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}dx$$

$$\int \frac{3\ dx}{(x^2+4)}\ + \int \frac{(2x-13)}{(x^2+4)^2}dx$$

NOTA: Para resolver la primera integral se aplicará la fórmula (19), en la segunda integral se tiene que aplicar linealidad para separar en dos integrales. El resultado es una tercera integral la cual se debe reducir en su exponente con la fórmula (27).

Fórmula: $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{ax^2+b})^2} = \frac{\boldsymbol{2n-3}}{\boldsymbol{2b(n-1)}}\int \frac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{ax^2+b})^{\boldsymbol{2-1}}} + \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2b(n-1)(ax^2+b)^{2-1}}}$ (27)

$\int \frac{3\ dx}{(x^2+4)}\ + \int \frac{2x\ dx}{(x^2+4)^2} + \int \frac{-13\ dx}{(x^2+4)^2}$ Renombraremos cada integral para realizarlas por separado

Inic ***1*** os con ***2*** tegral ***3*** al final *unir* todos los resultados

1 $\int \frac{3\ dx}{(x^2+4)}$ Aplicar (19) con $a^2 = 4,\ \ a = 2,\ \ v^2 = x^2,\ v = x$

$= 3\frac{1}{2}arc\tan\frac{x}{2} = \frac{3}{2}arc\tan\frac{x}{2} + c$ Resultado ***1***

2 $\int \frac{2x\ dx}{(x^2+4)^2}$ Realizar cambio de variable

$v = x^2 + 4$

$dv = 2x\ dx$

$\int \frac{dv}{v^2} = \int v^{-2}dv = \frac{v^{-1}}{-1} = -\frac{1}{v}$

$= -\frac{1}{(x^2+4)} + c$ Resultado ***2***

3 $\int \frac{-13\ dx}{(x^2+4)^2}$ Aplicar fórmula (27)

Conociendo que: $a = 1,\ b = 4,\ n = 2$

$$= -13\left[\frac{2(2)-3}{2(4)(2-1)}\int \frac{dx}{x^2+4} + \frac{x}{2(4)(2-1)(x^2+4)}\right]$$

$$= -13\left[\frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2+4} + \frac{x}{8(x^2+4)}\right] = \frac{-12}{8}\int \frac{dx}{x^2+4} - \frac{13x}{8(x^2+4)}$$

La integral del corchete se resuelve como en ***1***

$= \frac{-13}{8}\left(\frac{1}{2}arc\tan\frac{x}{2}\right) - \frac{13x}{8(x^2+4)} = \frac{-13}{16}arc\tan\frac{x}{2} - \frac{13x}{8(x^2+4)} + c$ Resultado ***3***

Unir los resultados ***1***, ***2*** y ***3***

$$\frac{3}{2}arc\tan\frac{x}{2} - \frac{1}{(x^2+4)}\frac{-13}{16}arc\tan\frac{x}{2} - \frac{13x}{8(x^2+4)}$$

Reducir y optimizar los términos.

$$= \frac{11}{16} arc\tan\frac{x}{2} + \frac{-13x(x^2+4)-8(x^2+4)}{8(x^2+4)(x^2+4)}$$

$$= \frac{11}{16} arc\tan\frac{x}{2} + \frac{(x^2+4)[-13x-8]}{8(x^2+4)(x^2+4)}$$

$$= \frac{11}{16} arc\tan\frac{x}{2} - \frac{13x-8}{8(x^2+4)} + c$$

Caso 4. Factores cuadráticos no repetidos (diferentes)

a) Integrar por fracciones parciales: $\int \frac{2x^3+3x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

$$\frac{2x^3+3x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

$$\frac{2x^3+3x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

$$2x^3+3x^2+2x+1 = \frac{(x^2+1)(x^2+2)[(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1)]}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

$$2x^3+3x^2+2x+1 = Ax^3+2Ax+Bx^2+2B+Cx^3+Cx+Dx^2+D$$

$$2x^3+3x^2+2x+1 = x^3(A+C)+x^2(B+D)+x(2A+C)+(2B+D)$$

Igualar coeficientes dependiendo del grado, para obtener un sistema de ecuaciones

$A+C=2$

$B+D=3$

$2A+C=2$

$2B+D=1$

Resolver el sistema de ecuaciones por algún método que conozcas. Aquí se darán las soluciones:

$A=0, \qquad B=-2, \qquad C=2, \qquad D=5$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+1}\,dx + \int \frac{Cx+D}{x^2+2}\,dx = \int \frac{-2\,dx}{x^2+1}dx + \int \frac{2x+5}{x^2+2}\,dx$$

$$= -2\int \frac{dx}{x^2+1} + 2\int \frac{xdx}{x^2+2} + 5\int \frac{dx}{x^2+2}$$

NOTA: La integral ***1*** y ***3*** se realizan con la fórmula (19) y la integral 2 se realiza por cambio de variable

1 ***2*** ***3***

1 $-2\int \frac{dx}{x^2+1}$

Conociendo que: $a^2 = 1$, $a = 1$, $v^2 = x^2$ y $v = x$

$= -2\left[\frac{1}{1} arctan\frac{x}{1}\right] = -2\arctan x + c$ Resultado ***1***

2 $2\int\frac{xdx}{x^2+2}$

$v = x^2 + 2$ $= \int\frac{dv}{v} = ln|v| = ln|x^2+2| + c$ Resultado ***2***

$dv = 2xdx$

3 $5\int\frac{dx}{x^2+2}$

Conociendo que: $a^2 = 2$, $a = \sqrt{2}$, $v^2 = x^2$ y $v = x$

$= 5\left[\frac{1}{\sqrt{2}} arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right] = \frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + c$

Unir los resultados ***1***, ***2*** y ***3***

$= -2\arctan x + ln|x^2+2| + \frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + c$

b) Integrar por fracciones parciales: $\int\frac{x^2-x+1}{x^3+4x}dx$

$= \int\frac{x^2-x+1}{x(x^2+4)}dx = \frac{x^2-x+1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$\frac{x^2-x+1}{x(x^2+4)} = \frac{A(x^2+4)+(Bx+C)(x)}{x(x^2+4)}$

$x^2 - x + 1 = \frac{x(x^2+4)[A(x^2+4)+(Bx+C)(x)]}{x(x^2+4)}$

$x^2 - x + 1 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$

$x^2 - x + 1 = x^2(A+B) + Cx + 4A$

Igualar coeficientes dependiendo del grado, para obtener un sistema de ecuaciones

$A + B = 1$

$C = -1$

$4A = 1$

$A = {}^1/_4$ ${}^1/_4 + B = 1$

$B = {}^3/_4$

Sustituir los valores $A = {}^1/_4$, $B = {}^3/_4$ y $C = -1$ en la integral

$\int\frac{x^2-x+1}{x(x^2+4)}dx \int\frac{A}{x}dx + \int\frac{Bx+C}{x^2+4}dx = \int\frac{dx}{4x} + \int\frac{\frac{3}{4}x-1}{x^2+4}dx$

Expandir la segunda integral

$\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{4}\int\frac{xdx}{x^2+4}-\int\frac{dx}{x^2+4}$

$v = x^2 + 4 \quad a^2 = 4$

$dv = 2xdx \quad a = 2$

$\frac{dv}{2} = xdx \quad v^2 = x^2$

$v = x$

$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{4}\int\frac{dv}{2v}-\int\frac{dx}{x^2+4}$

$=\frac{1}{4}In\left|x\right|+\frac{3}{8}In\left|v\right|-\frac{1}{2}arctan\frac{x}{2}$

$=\frac{1}{4}In\left|x\right|+\frac{3}{8}In\left|x^2+4\right|-\frac{1}{2}arctan\frac{x}{2}+c$

Pero no basta con oír *y leer* el mensaje; hay que ponerlo
en práctica, pues de lo contrario se estarían engañando
Apostol Santiago

CAPÍTULO 7. APLICACIONES DE LA INTEGRAL

7.1 ÁREAS

En esta sección se aplicarán los métodos anteriormente estudiados para el cálculo de áreas planas donde no se tiene una forma geométrica común conocida.

Por lo tanto, vamos a aplicar la integral para conocer el área debajo de una curva y hasta entre dos curvas. Tenemos 3 opciones mostradas en las *figuras 29,30* y 31.

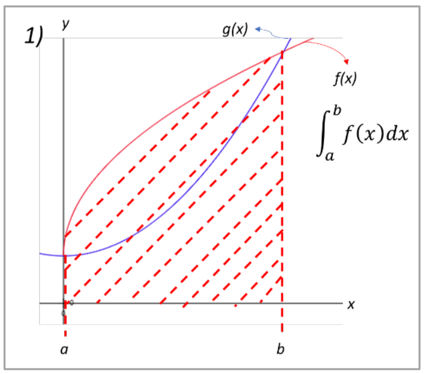


Figura 29. Área de la región debajo de g(x)

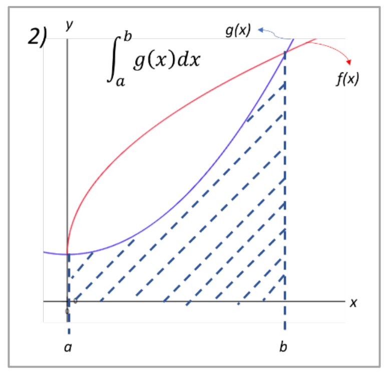


Figura 30. Área de la región debajo de f(x)

Consideremos dos curvas *y=f(x)* y *y=g(x)*, acotadas por las rectas *x= a* y *x= b*, con ambas funciones continuas y con la condición *f(x)≥g(x)*.

Por lo tanto, el área entre dos curvas es:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \tag{28}$$

En resumen, la expresión (28) nos indica que debemos obtener el área de la función que está más hacia arriba, como se puede observar en la *figura 29* y después el área de la función que se encuentra más abajo con dirección al eje *"x"*, como lo muestra la *figura 30*. Una vez que se tienen ambas áreas sólo se tiene que realizar una diferencia para determinar el área entre las dos funciones, mostrada en la *figura 31*.

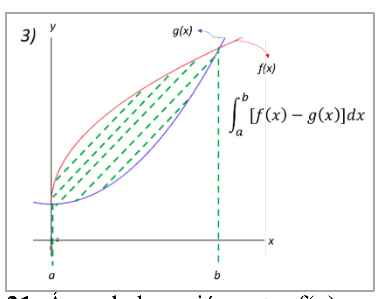


Figura 31. Área de la región entre f(x) y g(x)

Cabe mencionar que este tema fue abordado en el apartado de área por aproximación y fue mejorado con la integral definida, por lo tanto, solo se realizará un recordatorio, ya que en este caso la segunda función siempre será $y = 0$ [no tiene caso aplicar (28)].

Por ejemplo:

a) Determinar el área bajo la curva de $f(x) = 0.8^x$, desde [*0,5*], del gráfico de la *figura 32*.

$A = \int_0^5 0.8^x \, dx$

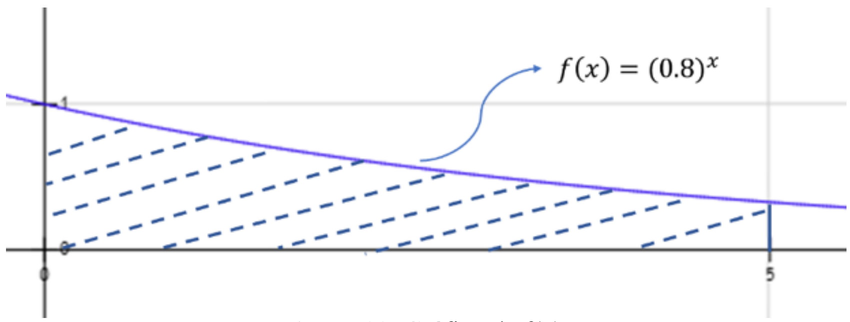


Figura 32. Gráfico de f(x)

Aplicar $\int \boldsymbol{a^v\, dv} = \frac{\boldsymbol{a^v}}{\boldsymbol{\ln a}} + \boldsymbol{c}$ (29)

$A = \int_0^5 0.8^x \, dx = \frac{0.8^x}{\ln 0.8} \Big|_0^5 = \frac{(0.8)^5}{\ln(0.8)} - \frac{(0.8)^0}{\ln(0.8)} = -1.46 - (-4.48)$

$A \approx 3.01 \, u^2$

Ahora vamos a realizar ejemplos de áreas entre dos gráficas (*"curvas"*).

b) De las siguientes funciones, calcular el área encerrada entre sus gráficas: $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$

$\sqrt{x} = x^2$	Elevar ambos términos al cuadrado para quitar el radical
$x = x^4$	Despejar x^4 al primer término
$x - x^4 = 0$	Por lo tanto, las raíces coinciden con los puntos de corte en
$x(1 - x^3) = 0$	la gráfica. $\boldsymbol{x = 0}$ *y* $\boldsymbol{x = 1}$

Ahora se deben de determinar los puntos de intersección que delimitan las áreas, como lo muestra la *figura 33*, igualando ambas funciones (*y*=*y*).

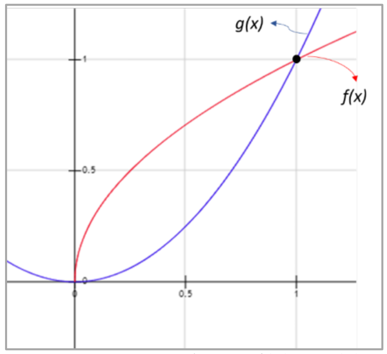


Figura 33. Funciones f(x) y g(x)

Aplicar (28)

$$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]\, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2(1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(1)^3}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{1}{3} u^2$$

c) Determinar el área entre las curvas de las siguientes funciones

$y = -x^2 + 4x \quad y = x^2 - 2x$ (ver *figura 34*)

Obtener los puntos de intersección

$$-x^2 + 4x = x^2 - 2x$$

$$-x^2 - x^2 + 4x + 2x = 0$$

$$-2x^2 + 6x = 0 \quad \lll \quad [f(x) - g(x)]$$

$$2x(-x + 3) = 0$$

$x = 0$ y $x = 3$

$$A = \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\, dx = \frac{-2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{-2(3)^3}{3} + 3(3)^2 - \left[\frac{-2(0)^3}{3} + 3(0)^2\right]$$

$$= \frac{-54}{3} + 27 = \frac{27}{3} = 9$$

$$A = 9\, u^2$$

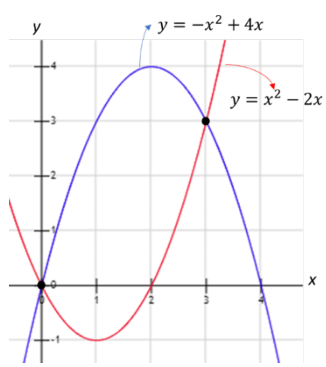


Figura 34. Puntos de cortes en los gráficos

d) Determinar el área que se encuentra entre las funciones $y = cosx$ y $y = 1 - \frac{2x}{\pi}$, en un intervalo de $[0, \frac{\pi}{2}]$ (ver *figura 35*)

Debido a que ya se tienen los puntos de corte, solo se aplica (28)

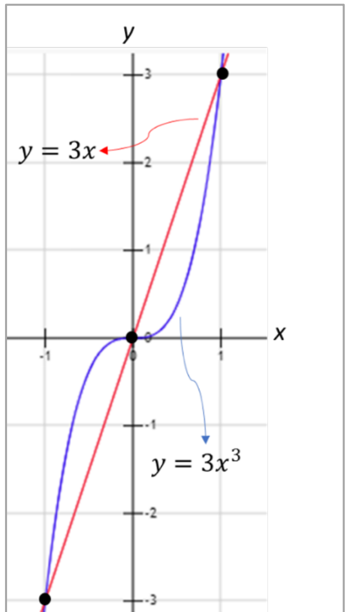


Figura 35. Área entre las funciones

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cosx - 1 + \frac{2x}{\pi})\, dx$$

$$= senx - x + \frac{x^2}{\pi} \Big| \begin{matrix} \pi/2 \\ 0 \end{matrix}$$

$$= sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{(\pi)^2}{4\pi}$$

$$A = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.214\, u^2$$

e) Calcular el área que se encuentra entre los gráficos de las siguientes funciones: $y = 3x^3$, $y = 3x$ (ver *figura 36*).

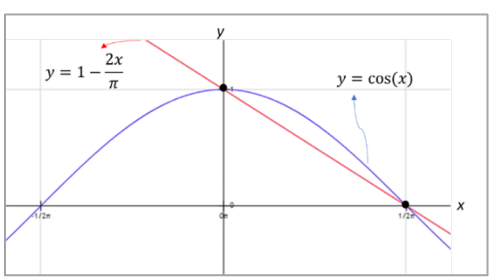


Figura 36. Tres puntos de corte en gráficos

Se observa en el gráfico de la *figura 36* que $y = 3x$ pasa por la parte de arriba, por lo tanto, los puntos de cortes son:

$3x = 3x^3$

$3x - 3x^3 = 0$

$3x(1 - x^2) = 0$

$x = 0 \quad x = 1$

Se puede notar que hay 3 puntos de corte en x^2 y el gráfico confirma las intersecciones {-1, 0, 1}.

Para obtener el área basta con obtener en una sola sección y multiplicar por 2

$$A_1 = \int_0^1 (3x - 3x^3)dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{3x^4}{4} \ \Big|_0^1$$

$$= \frac{3(1)^2}{2} - \frac{3(1)^4}{4} - \left[\frac{3(0)^2}{2} - \frac{3(0)^4}{4}\right] = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$A_{total} = 2A_1 = 2.\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{6}{4} = 1.5\ u^2$$

7.2 Longitud de arco

Medir una línea recta es muy fácil, aplicando una herramienta y una unidad de longitud conocida. El problema se presenta cuando se requiere medir la longitud de arco de una curva. Entonces procedemos con el siguiente análisis:

-Diseñamos una serie de triángulos rectángulos, de los cuales las hipotenusas cubran la curva desde ***a*** hasta ***b*** como lo muestra la *figura 37* y que la base de dichos rectángulos sea la misma “Δx”, de tal forma que cada rectángulo tenga asociado un cateto opuesto “Δy”.

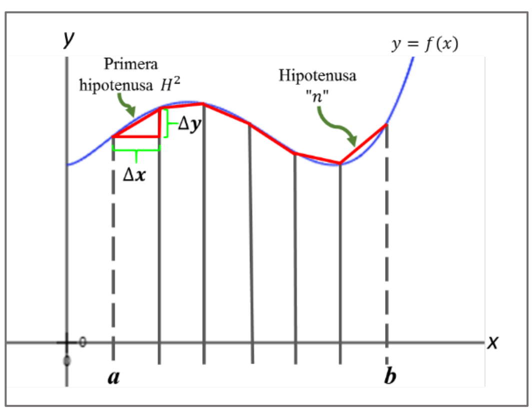


Figura 37. Longitud de curva

Para encontrar la distancia de una hipotenusa *“H”*, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$H^2 = A^2 + O^2$ Dónde:

A= Adyacente = Δx= Incremento en *“x”*

O= Opuesto = Δy= Incremento en "y"

H= Hipotenusa → S= Longitud de curva

Entonces:

$S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ Dividir entre Δx^2 para procurar tener un diferencial y una sola variable.

$\frac{S^2}{\Delta x^2} = \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}$ Despeja "S" y suprimir su potencia con raíz cuadrada en ambos lados.

$S = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\sqrt{\Delta x^2}$

Si en la curva mostramos *"n"* números de hipotenusas de tal forma que cada vez las incrementamos en número, observamos que Δx tiende cada vez, a ser más pequeña y así, se convierte en un *dx*. Y cada cociente incremental $\Delta y/\Delta x$ queda como dy/dx, que por concepto de derivada es $f'(x)$. La expresión toma la siguiente forma:

$S = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$ Recordando la integral de Riemann, la cual sumaba *"n"* números de áreas, ocuparemos el mismo principio para sumar *"n"* números de hipotenusas y rectificar de esta forma la curva.

$S = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$ Si hacemos que $n \to \infty$, el límite de la sumatoria nos daría el valor de la curva rectificada.

$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$ Y por definición de integral de Riemann dicho límite es una integral definida en $[a, b]$.

$\boldsymbol{S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx}$ ⋙ $\boldsymbol{S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx}$ (30)

Por ejemplo:

a) Calcular la longitud de curva de la función $f(x) = x^2$ en un intervalo de $[0,4]$, aplicando (30)

Derivar $f(x)$

$f'(x) = 2x$

Sustituir en la fórmula

$S = \int_0^4 \sqrt{1+(2x)^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1+4x^2}\, dx$

Resolver por sustitución trigonométrica

$a^2 = 1$ $\qquad$ $2x = tan\theta \;\therefore\; x = \frac{1}{2}tan\theta$

$a = 1$ $\qquad$ $dx = \frac{1}{2}sec^2\theta d\theta$

$4x^2 = tan^2\theta$ $\qquad$ $\sqrt{1+4x^2} = sec\theta$

Realizar la sustitución trigonométrica

$\int_0^4 \sqrt{1+4x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sec\theta\, sec^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^4 sec^3\theta d\theta$

La integral $\int sec^3\theta d\theta$ fué resuelta en el apartado 5.5.1 en el inciso **a)**, así que, sólo se tomará el resultado con respecto a la variable en uso.

$\frac{1}{2}\int_0^4 sec^3\theta d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}sec\,\theta\, tan\,\theta + \frac{1}{2}\; ln\,|sec\,\theta + tan\,\theta|\right]_0^4 =$

$= \frac{1}{4}sec\,\theta\, tan\,\theta + \frac{1}{4}\; ln\,|sec\,\theta + tan\,\theta|\,|_0^4$

Resolviendo el triángulo rectángulo, tenemos que: $Hip = \sqrt{1+4x^2},\ Op = 2x,\ Ady = 1$ y consultando la tabla 2 del apartado 6.6, tenemos la siguiente relación: $sec\theta = \frac{Hip}{Ady},\ tan\theta = \frac{Op}{Ady}$, por lo tanto, el resultado de la integral con respecto a la variable *"x"* quedaría de la siguiente forma.

$= \left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+4x^2}.2x\right) + \frac{1}{4}\; ln\left|\sqrt{1+4x^2}+2x\right|\right]_0^4$

$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+4(4)^2}.2(4)\right) + \frac{1}{4}\; ln\left|\sqrt{1+4(4)^2}+2(4)\right| - \left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+4(0)^2}.2(0)\right) + \frac{1}{4}\; ln\left|\sqrt{1+4(0)^2}+2(0)\right|\right]$

$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{65}.(8)\right) + \frac{1}{4}\; ln\left|\sqrt{65}+8\right| - \left[0 + \frac{1}{4}\; ln\left|\sqrt{1}\right|\right]$

$= 2\sqrt{65} + \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{65}+8\right) \approx 16.81$

b) Calcular la longitud de curva de la función $y = \ln(\sec x)$ en un intervalo de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Derivar la función

$y' = \frac{(\sec x)(tanx)}{\sec x} = tan\, x$

Sustituir en la fórmula (30)

$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + (\tan x)^2}\, dx$

$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + tan^2 x}\, dx$ Aplicar identidad: $\boldsymbol{sec^2 x = 1 + tan^2 x}$

$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{sec^2 x}\; dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \; dx$

$= \ln \left| \sec x + \tan x \right|$

$= \ln \left| \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| - \ln \left| \sec\ (0) + \tan\ (0) \right|$

$= \ln \left|\sqrt{2} + 1\right| - \ln \left|1 + 0\right|$

$= \ln \left|\sqrt{2} + 1\right| \approx 0.88\, u^2$

ANEXOS

Anexo 1. Identidades trigonométricas

$sen^2x + cos^2x = 1$	*De relación Pitagórica*	$tanx = \frac{senx}{cosx}$ $\quad cotx = \frac{cosx}{senx}$	*De la razón*
$sen^2x = 1 - cos^2x$		$cotx = \frac{1}{tanx}$	*De definiciones*
$cos^2x = 1 - sen^2x$		$secx = \frac{1}{cosx}$	
$tan^2x + 1 = sec^2x$	*Cuadradas*	$cscx = \frac{1}{senx}$	
$cot^2x + 1 = csc^2x$		$sen\ mx. cos\ nx = \frac{1}{2}[sen(m+n)x + sen(m-n)x]$	*Transformar los productos en sumas*
$sen^2x = \frac{1-\cos 2x}{2}$	*Reducción de exponen*	$cos\ mx. sen\ nx = \frac{1}{2}[sen(m+n)x - sen(m-n)x]$	
$cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2}$		$cos\ mx. cos\ nx = \frac{1}{2}[sen(m+n)x + cos(m-n)x]$	
$cosh^2x - senh^2x = 1$	*Hiperbólicas*	$sen\ mx. sen\ nx = \frac{1}{2}[sen(m+n)x - cos(m-n)x]$	
$tanh^2x + sech^2x = 1$		$cos2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta$	*Ángulo*
$coth^2x - csch^2x = 1$		$sen2\theta = 2sen\theta cos\theta$	

Anexo 2. Propiedades básicas de los logaritmos y exponenciales

$Log_a x = y = \underbrace{\frac{Log\ x}{Log\ a}}$ $\ggg$ $a^y = x$ con a > 0 y a ≠ 1 De esta forma se captura en la calculadora científica	
$Log_a\ a = 1,\ pues\ a^1 = a$	$In\ (x.y) = In\ x + In\ y$
$Log_a\ 1 = 0,\ pues\ a^0 = 1$	$In\ \left(\frac{x}{y}\right) = In\ x - In\ y$
$In\ 1 = 0$	$Inx^n = n\ In\ x$
$In\ e = 1$	$In\ \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\ In\ x$
$In\ e^n = n$	$e^{In\ a} = a$

Anexo 3. Propiedades de Factorización

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n!a^{n-k}}{k!(n-k)!}b^k + \cdots + b^n$	
$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + (-1)^k\frac{n!a^{n-k}}{k!(n-k)!}b^k + \cdots + (-1)^n b^n$	

Anexo 4. Propiedades de potencias

$a^0 = 1 \ (a \neq 0)$	$a^n * b^n = (ab)^n$
$a^1 = a$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$a^n * a^m = a^{n+m}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$(a^n)^m = a^{nm}$	$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

Anexo 5 Propiedades de los radicales

Para a>0, b>0 y n, m y k como números naturales	$(\sqrt[n]{a}\,)^k = \sqrt[n]{a^k}$
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Anexo 6 Reglas de derivación

Las reglas tienen paréntesis (n) y las propiedades corchetes [n]

Generales	$d(c) = 0$	(1)
	$d(x) = 1$	(2)
	$d(cf) = cf'$	(3)
	$dx^n = nx^{n-1}$	(4)
	$x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}$	[1.a]
	$x^{-1} = \frac{1}{x}$	[1.b]
	$d\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	(4.1)
	$d(uv) = udv + vdu$	(5)
	$d(\frac{u}{v}) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$	(6)
Trigonométricas	$dsenv = dvcosv$	(7)
	$dcosv = -dvsenv$	(8)
	$dtanv = dv\ sec^2 v$	(9)
	$dcotv = -dv\ csc^2 v$	(10)
	$dsecv = dv\ secv.tanv$	(11)
	$dcscv = -dv\ cscv.cotv$	(12)

Generales	$dv^n = nv^{n-1}\,dv$	(13)
	$d\sqrt{v} = \dfrac{dv}{2\sqrt{v}}$	(13.1)
	$d\left(\dfrac{c}{v}\right) = -\dfrac{cdv}{v^2}$	(13.2)
Exponenciales	$de^v = dve^v$	(14)
	$da^x = a^x Ina$	(15)
	$da^v = dva^v Ina$	(15.1)
Logarítmicas	$d\ In\ v = \dfrac{dv}{v}$	(16)
	$d\ log\ b\ v = \dfrac{dv}{v}\dfrac{1}{In\ b}$	(17)
Trigonométricas Inversas	$d\ arc\ sen\ v = \dfrac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$	(18)
	$d\ arc\ cos\ v = -\dfrac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$	(19)
	$d\ arc\ tan\ v = \dfrac{dv}{v^2+1}$	(20)
	$d\ arc\ cotg\ v = -\dfrac{dv}{v^2+1}$	(21)
	$d\ arc\ sec\ v = \dfrac{dv}{v\sqrt{v^2-1}}$	(22)
	$d\ arc\ csc\ v = -\dfrac{dv}{v\sqrt{v^2-1}}$	(23)
Hiperbólicas	$d\ senh\ v = dv\ cosh\ v$	(24)
	$d\ cosh\ v = dv\ senh\ v$	(25)
	$d\ tanh\ v = dv\ sech^2\ v$	(26)
	$d\ coth\ v = -dv\ csch^2\ v$	(27)
	$d\ sech\ v = -dv\ sech\ v\,.\,tanh\ v$	(28)
	$d\ csch\ v = -dv\ csch\ v\,.\,tanh\ v$	(29)

Anexo 7 Fórmulas para integrar

de acuerdo al libro

$A_{aprox} = \frac{A_1+A_2}{2}$	(1)
$\Delta x = \frac{b-a}{n}$	(2)
$A_1 = \Delta x[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})]$	(3)
$A_2 = \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)]$	(4)
$A_2 = \Delta x\ [\Sigma f(x_i) - f(x_0) + f(x_n)]$	(5)
$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$	(6)
$x_i = a + (\Delta x)i$	(7)
$x_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	(8)
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	(9)
$\int_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$	(10)
$\int_a^b x^n dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad con\ \ n = 1$	(11)
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	(12)
$\int \frac{dv}{v} = In\ v + c$	(13)
$\int cos\ v\ dv = sen\ v + c$	(14)
$\int sen\ vdv = -cosv + c$	(15)
$\int dx = x + c$	(16)
$\int tan\ v\ sec\ v\ dv = sec\ v + c$	(17)
$\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\vert\frac{v-a}{v+a}\right\vert + c$	(18)
$\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a} arctan \frac{v}{a} + c$	(19)
$\int cot\ vdv = ln\vert senv\vert + c$	(20)
$\int e^v dv = e^v + c$	(21)
$\int sec^2 vdv = tanv + c$	(22)
$\int udv = uv - \int v\ du$	(23)
$\int x^n\ ln\ x\ dx = \frac{x^{n+1}\ ln\ x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$	(24)
$\int sec\ vdv = \ell n(sec\ v + tan\ v) + c$	(25)
$\int csc^2 v\ dv = -cotv + c$	(26)
$\int \frac{dx}{(ax^2+b)^2} = \frac{2n-3}{2b(n-1)} \int \frac{dx}{(ax^2+b)^{2-1}} + \frac{x}{2b(n-1)(ax^2+b)^{2-1}}$	(27)
$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$	(28)

$\int a^v\,dv = \frac{a^v}{ln\,a} + c$	(29)
$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$	(30)
Otras Fórmulas	
$\int cdx = c\int dx$	(31)
$\int dx = x + c$	(32)
$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + c$	(33)
$\int a^v dv = \frac{a^v}{\ln a} + c$	(34)
$\int tan\,vdv = -\ln Cosv + c$	(35)
$\int tan\,vdv = \ln secv + c$	(36)
$\int csc\,vdv = \ln(cscv - cotv) + c$	(37)
$\int csc\,v.\cot v\,dv = -csc\,v + c$	(38)
$\int \frac{dx}{a^2-v^2} = \frac{1}{2a} ln\left\|\frac{a+v}{a-v}\right\| + c$	(39)
$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = arc\,sen\frac{v}{a} + c$	(40)
$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln(v + \sqrt{v^2 \pm a^2} + c$	(41)
$\int \sqrt{a^2 - v^2}\,dx = \frac{v}{2}\sqrt{a^2 - v^2} +$ $\frac{a^2}{2} arc\,sen\frac{v}{2} + c$	(42)
$\int \sqrt{v^2 \pm v^2}\,dx = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln(v +$ $\sqrt{v^2 \pm a^2}) + c$	(43)
ME. JUAN CARLOS RAYMUNDO VILLARREAL	

EDITA: RED IBEROAMERICANA DE ACADEMIAS DE INVESTIGACIÓN A.C
DUBLÍN 34, FRACCIONAMIENTO MONTE MAGNO
C.P. 91190. XALAPA, VERACRUZ, MÉXICO.
CEL 2282386072
PONCIANO ARRIAGA 15, DESPACHO 101.
COLONIA TABACALERA
DELEGACIÓN CUAUHTÉMOC
C.P. 06030. MÉXICO, D.F. TEL. (55) 55660965
www.redibai.org
redibai@hotmail.com

Sello editorial: Red Iberoamericana de Academias de Investigación, A.C. (978-607-99621)
Primera Edición, Xalapa, Veracruz, México.
No. de ejemplares: 2
Presentación en medio electrónico digital: Descargable
PDF 5.5 MB
Fecha de aparición 09/12/2021
ISBN 978-607-99595-2-4

Cálculo Paso a paso

AUTORES
ME. JUAN CARLOS RAYMUNDO VILLARREAL
ME. HÉCTOR MURILLO MARTÍNEZ
MIA. ARLENY LOBOS PÉREZ

Hoy en día el uso de matemáticas está presente en la mayoría de los ambientes en el que el ser humano se desarrolla. Para la gran mayoría de los estudiantes es una herramienta necesaria que deben aprender y más aún comprender, para poder manejar diversos temas de ingeniería. Esta obra pretende presentar una de las herramientas de el cálculo de una forma sencilla, clara y práctica, de tal forma que el lector sea capaz de entender otros libros de esta misma índole, y le ayude a comprender los fundamentos de los conceptos básicos del cálculo.

Para esto, daremos paso a explicar conceptos básicos sobre calculo diferencial e integral sin mucho tecnicismo. Además de ejercicios resueltos a detalle, de manera que el lector pueda observar cada paso de la solución de los diferentes problemas, de una forma ordenada y pequeñas explicaciones donde pueda existir alguna confusión.

Dicen que la mano tiene memoria, por lo que te recomiendo que, al analizar cada ejercicio, puedas transcribirlo y razonarlo para tener un mejor aprendizaje de los temas que te interesan, que espero sean, si no todos, por lo menos la mayoría.

MIGRACIÓN Y DESARROLLO
REDIBAI-MYD

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología
Redes Temáticas

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE TIERRA BLANCA

ISBN: 978-607-99595-2-4

9 786079 959524